INTERNATIONAL BACCALAUREATE
BACCALAURÉAT INTERNATIONAL
BACHILLERATO INTERNACIONAL

**MÉTODOS MATEMÁTICOS**
**NIVEL MEDIO**
**PRUEBA 2**

Lunes 12 de noviembre de 2001 (mañana)

2 horas

---

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

*Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta* **sin** *indicación del método utilizado no recibirá normalmente* **ningún** *punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

## SECCIÓN A

*Conteste las* **cinco** *preguntas de esta sección.*

**1.** *[Puntuación máxima: 11]*

Los teléfonos portátiles se vendieron por primera vez en el país de *Cellmanía* durante 1990. A lo largo de dicho año el número de teléfonos vendidos fue de 160. En 1991, el número de teléfonos vendidos fue de 240 y en 1992 fue de 360.

En 1993 se observó que las ventas anuales formaban una sucesión geométrica, siendo el primer término 160, y el 2° y el 3$^{er}$ términos 240 y 360 respectivamente.

(a) ¿Cuál es la razón de esta sucesión? *[1 punto]*

Presuponga que esta tendencia de ventas continúa.

(b) ¿Cuántos teléfonos se venderán durante 2002? *[3 puntos]*

(c) ¿En qué año pasará de 5000 por primera vez la cifra de teléfonos vendidos? *[4 puntos]*

Entre 1990 y 1992 el total de teléfonos portátiles vendidos es de 760.

(d) ¿Cuál es el número total de teléfonos vendidos entre 1990 y 2002? *[2 puntos]*

Durante este periodo de tiempo la población total de *Cellmanía* sigue siendo de aproximadamente 80 000.

(e) Haga uso de esta información para sugerir una razón por la que el crecimiento de las ventas no continuará geométricamente. *[1 punto]*

**2.** *[Puntuación máxima: 11]*

Las velocidades en km $h^{-1}$ de los vehículos que pasan por un punto determinado de la autopista se registran en la tabla que sigue:

| Velocidad $v$ | Nº de vehículos |
|---|---|
| $v \le 60$ | 0 |
| $60 < v \le 70$ | 7 |
| $70 < v \le 80$ | 25 |
| $80 < v \le 90$ | 63 |
| $90 < v \le 100$ | 70 |
| $100 < v \le 110$ | 71 |
| $110 < v \le 120$ | 39 |
| $120 < v \le 130$ | 20 |
| $130 < v \le 140$ | 5 |
| $v > 140$ | 0 |

(a) Calcule una estimación de la velocidad media de los vehículos. *[2 puntos]*

(b) Las frecuencias acumuladas correspondientes a la información anterior figuran en la tabla que sigue:

| Velocidad $v$ | Frecuencia acumulada |
|---|---|
| $v \le 60$ | 0 |
| $v \le 70$ | 7 |
| $v \le 80$ | 32 |
| $v \le 90$ | 95 |
| $v \le 100$ | $a$ |
| $v \le 110$ | 236 |
| $v \le 120$ | $b$ |
| $v \le 130$ | 295 |
| $v \le 140$ | 300 |

(i) Escriba los valores de $a$ y de $b$ .

(ii) En papel milimetrado, dibuje una **curva** de frecuencias acumuladas que represente dicha información. Utilice una escala de 1 cm por cada 10 km $h^{-1}$ en el eje horizontal y una escala de 1 cm por cada 20 vehículos en el eje vertical. *[5 puntos]*

(c) Utilice su gráfica para determinar:

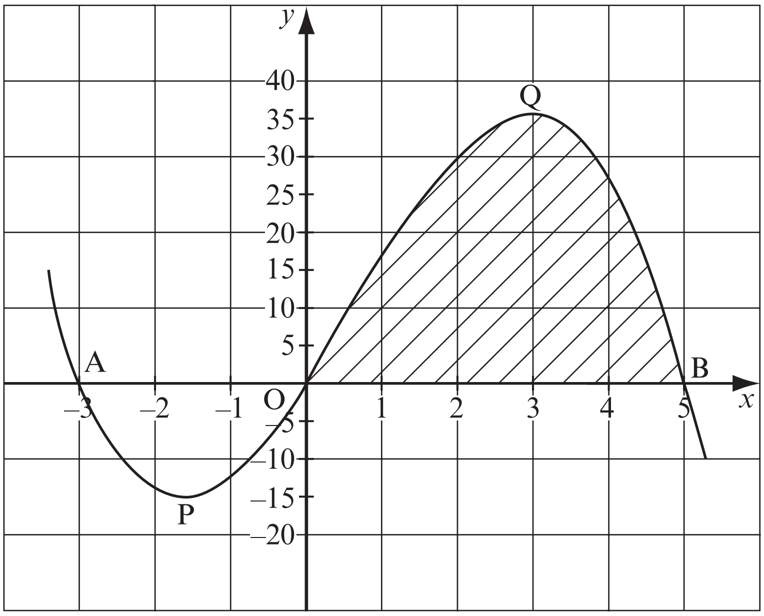
(i) El porcentaje de vehículos que viajan a velocidades superiores a 105 km $h^{-1}$;

(ii) La velocidad que el 15% de los vehículos excede. *[4 puntos]*

**3.** *[Puntuación máxima: 15]*

El diagrama que sigue muestra parte de la gráfica de la función

$$f : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 15x .$$




La gráfica intercepta el eje O$x$ en A(–3, 0), B(5, 0) y en el origen, O . En P hay un mínimo y en Q hay un máximo.

(a) La función puede también escribirse en la forma: $f : x \mapsto -x(x-a)(x-b)$ , donde $a < b$ . Escriba el valor de:

(i) $a$ ;

(ii) $b$ . *[2 puntos]*

(b) Halle

(i) $f'(x)$ ;

(ii) los valores **exactos** de $x$ para los que $f'(x) = 0$ ;

(iii) el valor de la función en el punto Q . *[7 puntos]*

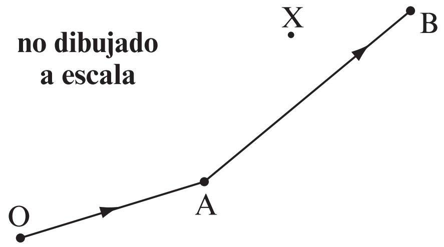
(c) (i) Halle la ecuación de la tangente de la gráfica de $f$ en el punto O .

(ii) Dicha tangente corta la gráfica de $f$ en otro punto. Dé la abscisa de este punto. *[4 puntos]*

(d) Halle el área de la región sombreada. *[2 puntos]*

**4.** *[Puntuación máxima: 18]*

El diagrama que sigue muestra las posiciones de las ciudades O , A , B y X .




La ciudad A se encuentra 240 km al Este y 70 km al Norte de O .
La ciudad B se encuentra 480 km al Este y 250 km Norte de O .
La ciudad X se encuentra 339 km al Este y 238 km Norte de O .

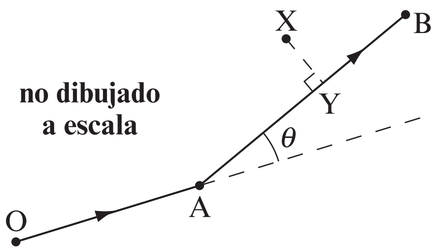
Un aeroplano vuela a una velocidad constante de 300 km h$^{-1}$ desde O hacia A .

(a) (i) Demuestre que $\overrightarrow{OA}$ $\begin{pmatrix}0{,}96\\0{,}28\end{pmatrix}$ es un vector unidad en la dirección.

(ii) Escriba el vector de la velocidad correspondiente al aeroplano en la forma $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ .

(iii) ¿Cuánto tiempo tardará el aeroplano en llegar a A ? *[5 puntos]*

Al llegar a A el aeroplano cambia de dirección y se dirige hacia B . El ángulo formado por la dirección original y la nueva dirección es $\theta$, como se muestra en el diagrama que sigue. Este diagrama muestra también el punto Y , situado entre A y B , que es el punto más cercano a X al que llega el aeroplano.




(b) Use el producto escalar de los dos vectores para hallar el valor de $\theta$ en grados. *[4 puntos]*

(c) (i) Escriba el vector $\overrightarrow{AX}$ .

(ii) Demuestre que el vector $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ .

(iii) Halle la proyección de $\overrightarrow{AX}$ en la dirección de $\boldsymbol{n}$ , y utilice esta proyección para hallar la distancia XY . *[6 puntos]*

(d) ¿Cuán lejos de A está el aeroplano cuando llega a Y ? *[3 puntos]*

**5.** *[Puntuación máxima: 15]*

Una pelota se deja caer desde una gran altura. Su velocidad $v$ la da

$$v = 50 - 50e^{-0,2t}, \ t \geq 0$$

donde $v$ se expresa en metros por segundo y $t$ en segundos.

(a) Halle el valor de $v$ cuando

(i) $t = 0$ ;

(ii) $t = 10$ . *[2 puntos]*

(b) (i) Halle una expresión para la aceleración, $a$, como función de $t$ .

(ii) ¿Qué valor tiene $a$ cuando $t = 0$ ? *[3 puntos]*

(c) (i) ¿A qué valor tiende $v$ al ir aumentando el valor de $t$ ?

(ii) ¿A qué valor tiende $a$ al ir aumentando el valor de $t$ ?

(iii) Explique la relación entre las respuestas a los apartados (i) y (ii). *[3 puntos]*

(d) Sea $y$ la distancia recorrida al cabo de $t$ segundos.

(i) Demuestre que $y = 50t + 250e^{-0,2t} + k$ , donde $k$ es una constante.

(ii) Dado que $y = 0$ cuando $t = 0$ , halle el valor de $k$ .

(iii) Halle el tiempo necesario para caer 250 m, aproximando su respuesta con **cuatro** cifras significativas. *[7 puntos]*

## SECCIÓN B

*Conteste* **una** *pregunta de esta sección.*

**Métodos estadísticos**

**6.** *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Se estampan sacos de cemento con el rótulo de 25 kg. Los sacos se llenan a máquina y los pesos reales constituyen una distribución normal de 25,7 kg de media y 0,50 kg de desviación típica.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un saco escogido al azar pese menos de 25,0 kg? *[2 puntos]*

A fin de reducir el número de sacos con peso insuficiente (sacos que pesan menos de 25 kg) al 2,5% del total, la media se aumenta sin por ello alterar la desviación típica.

(b) Demuestre que la media así incrementada tiene un valor de 26,0 kg. *[3 puntos]*

Se decidió adquirir una máquina más precisa para llenar los sacos. Los requisitos para esta nueva máquina son que sólo el 2,5% de los sacos pese menos de 25 kg y que sólo el 2,5% de los sacos pese más de 26 kg.

(c) Calcule la media y la desviación típica necesarias para que se cumplan tales requisitos. *[3 puntos]*

El costo de la nueva máquina es de $5 000. El cemento se vende a $0,80 el kg.

(d) En comparación con el costo de trabajar con una media de 26 kg, ¿cuántos sacos habrá que llenar y vender para recuperer el costo del nuevo equipo? *[3 puntos]*

(ii) Se afirma que la población de hombres de 17 años de un país dado forma una distribución normal, con media de 175 cm y desviación típica de 12,0 cm. A fin de investigar tal prentensón, se miden las alturas de una muestra aleatoria de 36 hombres de dicha edad del país en cuestión, obteniéndose una media de 178,9 cm para dicha muestra. Se presupone que es correcta la desviación típica de la población, citada más arriba como de 12,0 cm.

Las hipótesis se someten a prueba. La hipótesis alternativa, $H_1$, es que la media es mayor de 175 cm.

(a) (i) Enuncie la hipótesis nula $H_0$.

(ii) Indique si se usa una prueba de una cola o de dos colas. *[2 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 6(ii): continuación)*

(b) A un nivel de significación del 5%, ¿qué magnitud debe tener la media de la muestra (con una precisión de una décima (0,1) de cm) para rechazar $H_0$? *[4 puntos]*

(c) Enuncie las conclusiones que emanen de esta investigación. *[2 puntos]*

(iii) En un examen de historia las redacciones se corrigen con respecto a un máximo de 25 . Como consecuencia del gran número de alumnos, no todas las redacciones puede corregirlas el mismo profesor. A fin de asegurarse de que todos los profesores corrigen de la misma manera, el director vuelve a corregir una muestra de 8 redacciones del lote de cada profesor.

La tabla que sigue muestra los puntos ($x$) otorgados por el Profesor A , y los puntos ($y$) otorgados por el director para la misma redacción .

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 7 | 10 | 13 | 15 | 16 | 18 | 20 |
| $y$ | 6 | 8 | 12 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 |

(a) Calcule la ecuación de la recta de regresión de $y$ sobre $x$ por los mínimos cuadrados en forma de $y = px + q$ . *[3 puntos]*

(b) Halle el coeficiente de la correlación lineal, $r$ , entre $y$ y $x$ . *[2 puntos]*

Los valores de $p$ , $q$ y $r$ correspondientes a los profesores B y C se dan en la siguiente tabla.

| | $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| Profesor B | 1,02 | –3,08 | 0,997 |
| Profesor C | 1,00 | 0 | 0,890 |

La puntuación final que recibe cada alumno se calcula sustituyendo los puntos $x$ otorgados por el profesor en la ecuación de la recta de regresión correspondiente a dicho profesor.

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

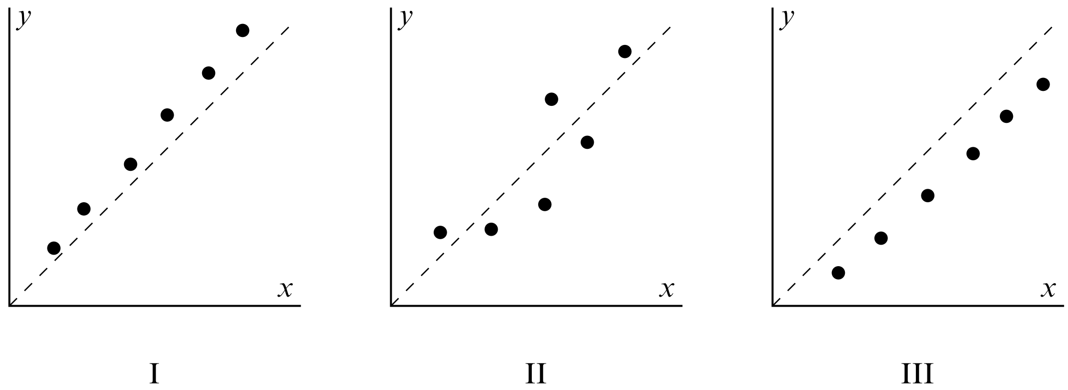
*(Pregunta 6(iii): continuación)*

(c) Se otorgará una puntuación final de 16 al alumno al que el profesor C otorgue 16 puntos. ¿Qué puntuación final (redondeada al entero más próximo) se otorgará a un alumno al que le haya otorgado 16 puntos

(i) el Profesor A ?

(ii) el Profesor B ? *[2 puntos]*

Las gráficas que siguen son diagramas de dispersión que se obtienen al trazar $y$ con respecto a $x$ para cada uno de los profesores. La recta cuya ecuación es $y = x$ se representa por una línea discontinua en cada caso.




(d) ¿Qué diagrama de dispersión corresponde al

(i) Profesor B ?

(ii) Profesor C ? *[2 puntos]*

(e) Este proceso no altera la puntuación otorgada por el profesor C . A pesar de ello, explique por qué la puntuación del profesor C es la menos de fiar. *[2 puntos]*

**Extensión de análisis**

*En toda la pregunta 7, donde corresponda, las medidas se expresan en radianes.*

**7.** *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere la función $y = \dfrac{3x - 2}{2x + 5}$.

La gráfica de esta función presenta una asíntota vertical y otra horizontal.

(a) Escriba la ecuación de

(i) la asíntota vertical;

(ii) la asíntota horizontal. *[2 puntos]*

(b) Halle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, simplificando la respuesta lo más posible. *[3 puntos]*

(c) ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de esta función? *[1 punto]*

(ii) (a) Use la sustitución $u = \tan 3x$ para obtener una expresión de la integral indefinida en función de $u$.

$$\int \tan^3(3x)\left(\frac{1}{\cos^2(3x)}\right)\mathrm{d}x.$$ *[3 puntos]*

(b) Partiendo de aquí, obtenga un valor **exacto** de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{9}} \tan^3(3x)\left(\frac{1}{\cos^2(3x)}\right)\mathrm{d}x$. *[3 puntos]*

(iii) Considere la gráfica de $y = x \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

(a) Halle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. *[1 punto]*

(b) Demuestre que la derivada segunda $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -x \operatorname{sen} x + 2\cos x$. *[2 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 7(iii): continuación)*

Esta gráfica tiene un punto de inflexión cerca de $x = 1$ .

(c) Demuestre que la abscisa del punto de inflexión debe satisfacer la ecuación $x = \dfrac{2}{\tan x}$ . *[2 puntos]*

Otra ecuación que tiene que cumplirse en este punto de inflexión es

$$x = \arctan\left(\frac{2}{x}\right) .$$

Sea $g(x) = \dfrac{2}{\tan x}$ y sea $h(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ .

Habrá de emplearse la iteración de punto fijo para encontrar la abscisa del punto del inflexión. Habrá de utilizarse $x_0 = 1$ cómo valor inicial.

(d) Empleando $x_{n+1} = g(x_n)$ , halle, con **cuatro** cifras decimales,

(i) $x_1$ ;

(ii) $x_2$ . *[2 puntos]*

(e) Empleando $x_{n+1} = h(x_n)$ , halle, con **cuatro** cifras decimales,

(i) $x_1$ ;

(ii) $x_2$ . *[2 puntos]*

(f) Dé la abscisa del punto de inflexión con **seis** cifras decimales. *[2 puntos]*

La gráfica de $y = x \operatorname{sen} x$ tiene un máximo local cerca de $x = 2$ .

(g) Explique las razones por las que la abscisa de este máximo local tiene que satisfacer la ecuación $f(x) = 0$, en la que $f(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$ . *[1 punto]*

(h) La solución de $f(x) = 0$ tiene que hallarse utilizando el método de Newton-Raphson. Comenzando con $x_0 = 2$ , halle

(i) $x_1$ , con **cuatro** cifras decimales;

(ii) la solución, con **seis** cifras decimales. *[6 puntos]*

**Extensión de geometría**

**8.** *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La transformación $\boldsymbol{R}$ se representa por la matriz $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & -0{,}28 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule el determinante de esta matriz. *[2 puntos]*

(b) Demuestre que la matriz es la inversa de sí misma. *[2 puntos]*

(c) Halle la imagen de los siguientes puntos bajo esta transformación.

(i) $(0, 0)$;

(ii) $(4, 3)$. *[2 puntos]*

(d) Partiendo de aquí, dé una descripción geométrica completa de la transformación $\boldsymbol{R}$. *[2 puntos]*

Otra transformación $\boldsymbol{S}$ se representa por la matriz

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

La transformación producto $\boldsymbol{T}$ es la transformación $\boldsymbol{R}$ seguida de $\boldsymbol{S}$.

(e) (i) Halle la matriz de $\boldsymbol{T}$.

(ii) Dé una descripipición geométrica completa de la transformación $\boldsymbol{T}$. *[3 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8: continuación)*

(ii) *En este apartado, los* ***vectores de posición*** *de puntos deben representarse en* ***columnas.***

El punto P tiene las coordenadas $(x, y)$ .

(a) Bajo una cierta traslación, la imagen del punto $(5,2)$ es el origen $(0,0)$, y la imagen del punto P es el punto Q . Escriba el vector de posición de Q . *[1 punto]*

(b) El punto U es la imagen de Q bajo una rotación de 90° alrededor del origen. Escriba el vector de posición de U . *[2 puntos]*

(c) Al efectuarse una segunda traslación, la imagen del origen es el punto $(5,2)$ . Bajo esta trasformación V es la imagen de U . Escriba el vector de posición de V . *[1 punto]*

(d) La transformación $\boldsymbol{W}$ es representada por

$$\boldsymbol{W}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} .$$

Bajo $\boldsymbol{W}$, la imagen de P es V .

(i) Determine el valor de

(a) $p$ ;

(b) $q$ . *[3 puntos]*

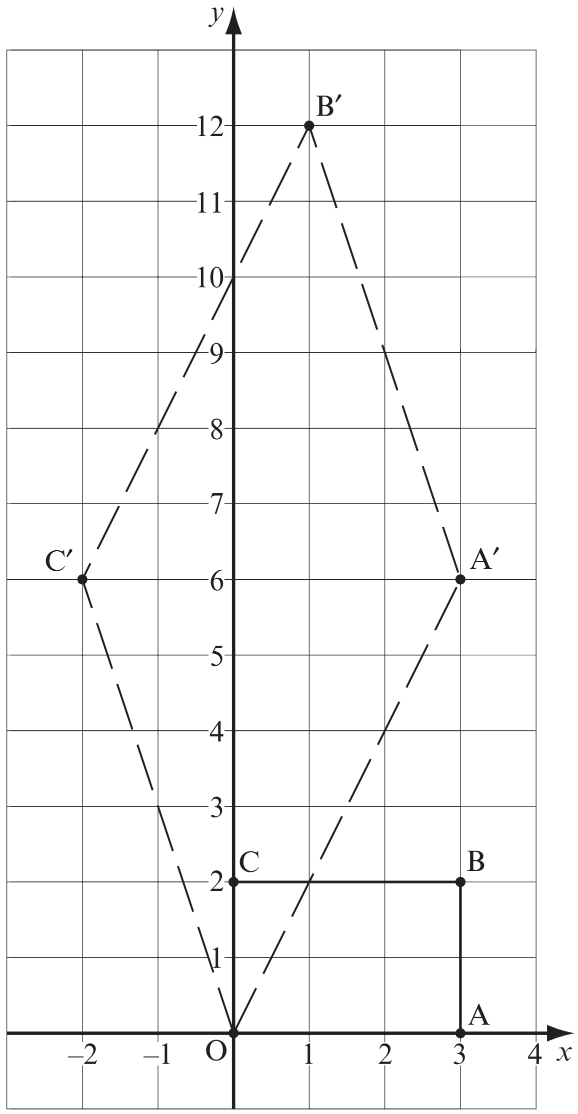
(ii) Demuestre que el único punto invariante de la transformación $\boldsymbol{W}$ es $(5,2)$ . *[2 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8: continuación)*

(iii) El diagrama que sigue muestra el rectángulo OABC y el paralelogramo OA′B′C′, donde OABC se transforma en OA′B′C′ mediante la transformación cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$




*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8(iii): continuación)*

(a) Halle el área de $OA'B'C'$. *[2 puntos]*

Existe un ángulo $\theta$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\theta$ es el ángulo de la rotación alrededor de $(0,0)$ en el caso de la transformación representada por la matriz media.

(b) Demuestre que $\theta = \arctan 2$. *[3 puntos]*

(c) Dé una descripición geométrica completa de la transformación representada por

(i) $\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *[4 puntos]*

(d) ¿Cuál de las dos transformaciones descritas en el apartado (c) se aplica primero? *[1 punto]*