MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Miércoles 5 de noviembre de 2003 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

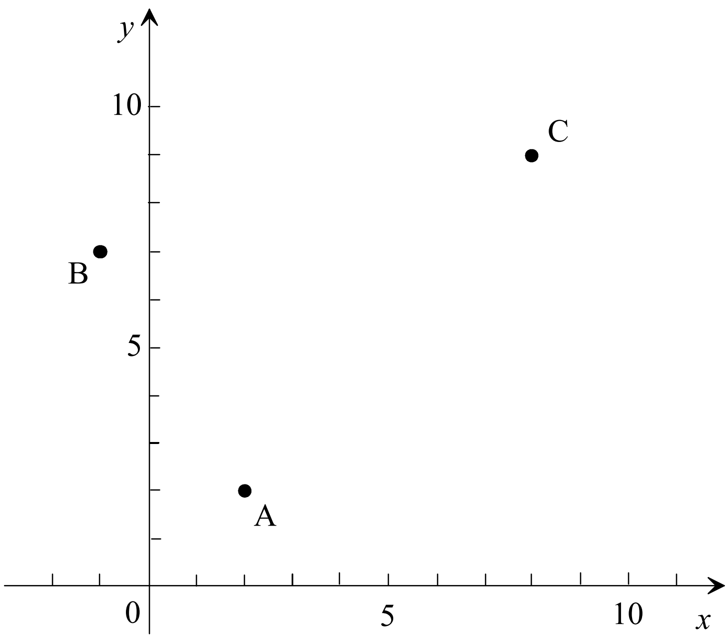
Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 16]*

Los puntos A, B y C señalados en la siguiente figura son tres de los vértices de un paralelogramo ABCD. El vector de posición del punto A es $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



(a) Escriba el vector de posición de B y el de C. *[2 puntos]*

(b) El vector de posición del punto D es $\begin{pmatrix} d \\ 4 \end{pmatrix}$. Halle d. *[3 puntos]*

(c) Halle $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

La recta L pasa por B y D.

(d) (i) Escriba una ecuación vectorial de L en la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

(ii) Calcule el valor de t en el punto B. *[3 puntos]*

(e) Sea P el punto $(7, 5)$. Tras encontrar el valor de t en P, compruebe que P pertenece a la recta L. *[3 puntos]*

(f) Compruebe que $\overrightarrow{\text{CP}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\text{BD}}$. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 13]*

La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio 12 cm. La cuerda AB determina un ángulo central de 75°. Las tangentes a la circunferencia en A y en B se encuentran en P.

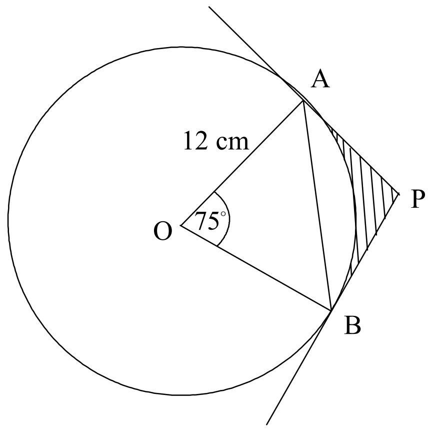


figura no dibujada a escala

(a) Utilizando la regla del coseno, compruebe que la longitud de AB es $12\sqrt{2(1-\cos 75^\circ)}$. *[2 puntos]*

(b) Calcule la longitud de BP. *[3 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, halle

(i) el área del triángulo OBP;

(ii) el área del triángulo ABP. *[4 puntos]*

(d) Halle el área del **sector** OAB. *[2 puntos]*

(e) Halle el área de la región sombreada. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 11]*

Los diagramas que aparecen a continuación muestran los primeros cuatro cuadrados de una sucesión de cuadrados subdivididos por la mitad. El área sombreada del cuadrado A es $\frac{1}{4}$.

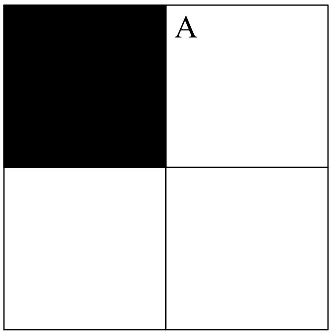


Diagrama 1

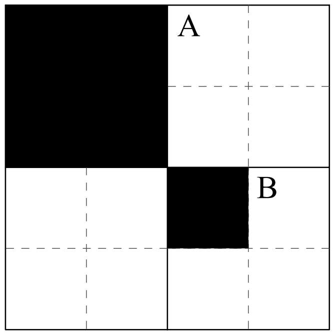


Diagrama 2

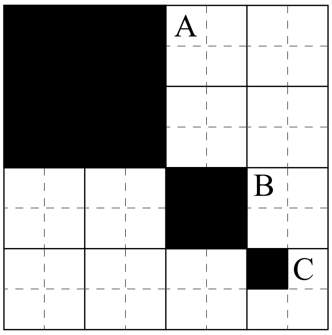


Diagrama 3

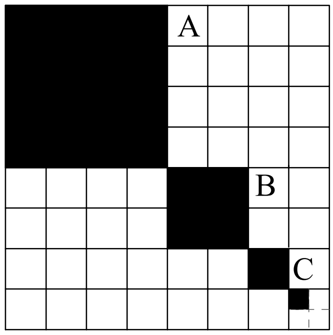


Diagrama 4

(a) (i) Halle el área del cuadrado B y del cuadrado C.

(ii) Compruebe que las áreas de los cuadrados A, B y C están en progresión geométrica.

(iii) Escriba la razón común de la progresión. *[5 puntos]*

(b) (i) Halle el área **total** de la región sombreada en el diagrama 2.

(ii) Halle el área **total** de la región sombreada correspondiente al 8º diagrama de esta sucesión. Exprese su respuesta con **seis** cifras significativas. *[4 puntos]*

(c) Este proceso de división y sombreado se continúa indefinidamente. Halle el área total sombreada. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

Considere la función $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-2x}$.

(a) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) Explique brevemente por qué el resultado anterior nos permite afirmar que $f(x)$ es una función decreciente para todos los valores de x (es decir, que el valor de $f(x)$ siempre decrece al aumentar el valor de x). *[2 puntos]*

Sea P el punto de la gráfica de f donde $x = -\frac{1}{2}$.

(b) Halle una expresión en función de e para

(i) la ordenada de P;

(ii) la pendiente de la tangente a la curva en P. *[2 puntos]*

(c) Halle la ecuación de la tangente a la curva en P, expresando la respuesta en la forma $y = ax + b$. *[3 puntos]*

(d) (i) Dibuje de forma aproximada la gráfica de f para $-1 \le x \le 2$.

(ii) Trace la tangente en $x = -\frac{1}{2}$.

(iii) Sombree el área encerrada por la curva, la tangente y el eje y.

(iv) Halle esta área. *[7 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 16]*

Nota: En toda esta pregunta se utilizan radianes.

Una masa está suspendida del techo por medio de un muelle. Se tira de ella hacia abajo hasta el punto P y después se suelta. La masa oscila de arriba abajo.

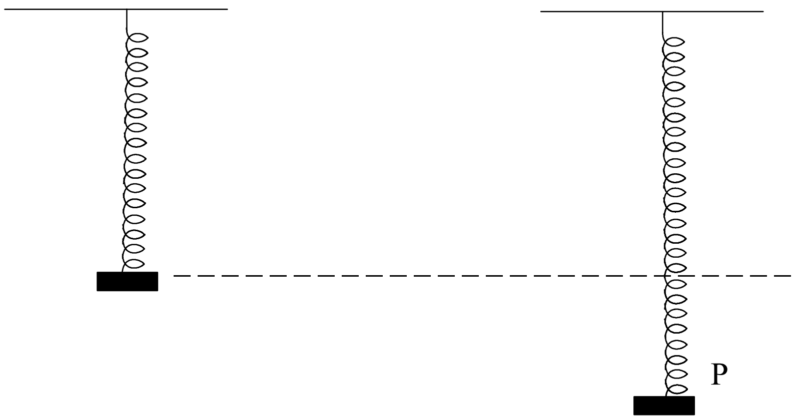


figura no dibujada a escala

Su distancia al techo, s cm, viene dada por la función $s = 48 + 10\cos 2\pi t$ donde t es el tiempo, en segundos, desde el instante en que se suelta.

(a) (i) ¿A qué distancia del techo se encuentra el punto P?

(ii) ¿Cuánto tarda la masa en volver a pasar por P? *[5 puntos]*

(b) (i) Halle $\frac{ds}{dt}$.

(ii) ¿Dónde se encuentra la masa cuando la velocidad es cero? *[7 puntos]*

Una segunda masa está suspendida de otro muelle. Su distancia al techo, r cm, viene dada por la función $r = 60 + 15\cos 4\pi t$. Las dos masas se sueltan al mismo tiempo.

(c) Calcule el valor de t cuando ambas masas se encuentran a la misma distancia del techo por primera vez. *[2 puntos]*

(d) Durante los primeros tres segundos, ¿cuántas veces se encuentran las dos masas a la misma altura? *[2 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Se afirma que los pesos individuales de una población de leones siguen una distribución normal con un peso medio de 310 kg y una desviación típica de 30 kg.

(a) Calcule la probabilidad de que un león elegido al azar tenga un peso de 350 kg o más. *[2 puntos]*

(b) La probabilidad de que el peso de un león se encuentre entre a y b es 0,95; donde a y b son simétricos respecto a la media. Halle el valor de a y de b. *[3 puntos]*

Un biólogo pretende comprobar la afirmación de que el peso medio es de 310 kg. Se estudia una muestra al azar de 36 leones. El peso medio de esta muestra es de 300 kg. Se admite como cierta la desviación típica de 30 kg para la población.

(c) Calcule la probabilidad de obtener una media muestral de 300 kg o menos, si la media de 310 kg para la población es correcta. *[3 puntos]*

(d) La conclusión del biólogo es que la media de la población es menor de 310 kg. Justifique esta conclusión. *[2 puntos]*

(ii) Se afirma que las chicas son mejores que los chicos en geografía. Para comprobar esta hipótesis, se realiza una prueba entre 120 chicas y 80 chicos. Los alumnos pueden aprobar o suspender la prueba. Los resultados son los siguientes

	Aprobado	**Suspenso**	**Total**
Chicas	96	24	120
Chicos	54	26	80
Total	150	50	200

(a) Construya la tabla de valores esperados para número de aprobados y suspensos, suponiendo que la aptitud para la geografía es independiente del género. *[4 puntos]*

(b) Calcule χ^2 para estos data. *(No se requiere el uso de la corrección de Yates.)* *[2 puntos]*

(c) El valor crítico de χ^2 con un nivel de significación del 5 % es 3,841. ¿Cuál es la conclusión? *[1 punto]*

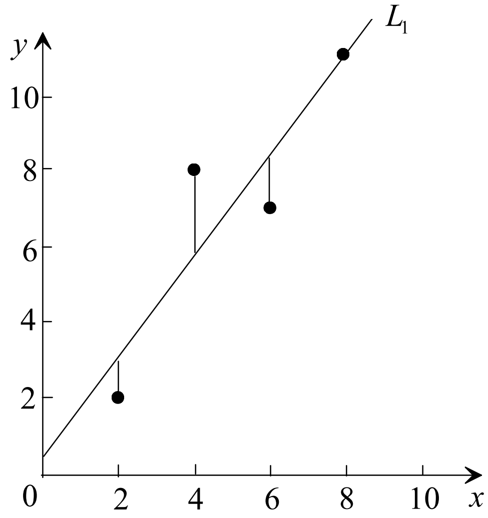
(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) Un experimento da como resultado los siguientes **cuatro** puntos (x, y) de datos

$$(2,2)\,;\ (4,8)\,;\ (6,7)\,;\ (8,11)\,.$$

La recta de regresión de mínimos cuadrados L_1 de y sobre x viene dada por la ecuación $y = 1{,}3x + 0{,}5$. El siguiente diagrama de dispersión nos muestra de forma aproximada los cuatro puntos y la recta L_1.



Las distancias verticales entre los puntos de datos y la recta L_1 vienen dados por la siguiente tabla.

Punto	**Distancia**
$(2,2)$	1,1
$(4,8)$	c
$(6,7)$	d
$(8,11)$	0,1

(a) (i) Compruebe que $c = 2{,}3$ y calcule d.

(ii) Calcule $V = 1{,}1^2 + c^2 + d^2 + 0{,}1^2$.

(iii) Se traza sobre el diagrama otra recta (distinta de la recta de regresión de mínimos cuadrados). Se calculan las nuevas distancias verticales (desde los cuatro puntos a esta recta). ¿Qué diferencia existe entre la suma de los cuadrados de estas distancias y V? *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(b) La suma de los cuadrados de las distancias horizontales de los cuatro puntos a L_1 es 4,85.

Sea H la suma de los cuadrados de las distancias horizontales de los cuatro puntos a otra recta cualquiera.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(i) $H \leq 4{,}85$ para **toda** otra recta cualquiera.

(ii) $H \geq 4{,}85$ para **toda** otra recta cualquiera.

(iii) $H \leq 4{,}85$ para algunas rectas y $H \geq 4{,}85$ para otras. *[2 puntos]*

(c) Se intercambian las coordenadas x e y de los puntos, obteniendo los nuevos puntos $(2, 2)$; $(8, 4)$; $(7, 6)$ y $(11, 8)$. Halle la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados L_2 para estos nuevos puntos. *[3 puntos]*

(d) Tenemos que $\dfrac{2+4+6+8}{4} = 5$. El punto $(5, 7)$ pertenece a L_1 y el $(7, 5)$ a L_2.

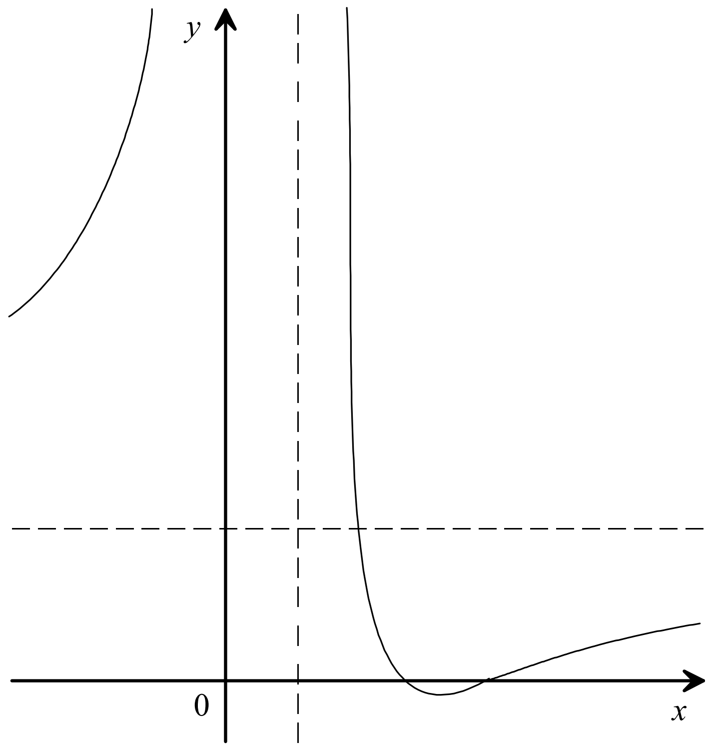
¿Qué propiedad de la recta de regresión de mínimos cuadrados pone de manifiesto la afirmación anterior? *[3 puntos]*

Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere la función f dada por $f(x) = \dfrac{2x^2 - 13x + 20}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

A continuación se puede ver parte de la gráfica de f.



(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

Como se observa en la figura, la gráfica tiene una asíntota vertical y una asíntota horizontal.

(a) Escriba la **ecuación** de la asíntota vertical. *[1 punto]*

(b) $f(100) = 1{,}91$; $f(-100) = 2{,}09$; $f(1000) = 1{,}99$

(i) Calcule el valor de $f(-1000)$.

(ii) Escriba la **ecuación** de la asíntota horizontal. *[2 puntos]*

(c) Compruebe que $f'(x) = \dfrac{9x-27}{(x-1)^3}$, $x \neq 1$. *[3 puntos]*

La derivada segunda viene dada por $f''(x) = \dfrac{72-18x}{(x-1)^4}$, $x \neq 1$.

(d) Utilizando los valores de $f'(x)$ y $f''(x)$, explique por qué tiene que existir un mínimo en $x = 3$. *[2 puntos]*

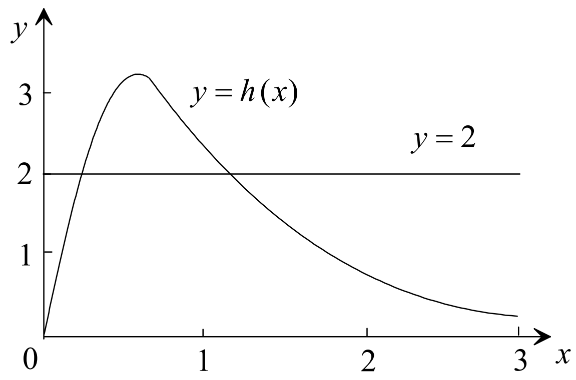
(e) La gráfica $f(x)$ tiene un punto de inflexión. Escriba las coordenadas de ese punto. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) Considere la función $h : x \mapsto \dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$.

La gráfica de esta función, para $0 \le x \le 3$ se muestra a continuación.



El valor de la función es 2 en un punto cercano a $x = 0{,}2$, y en otro punto cercano a $x = 1{,}2$.

(a) Compruebe que la ecuación $h(x) = 2$ puede expresarse en la forma

$$x = \frac{(x^2+1)^2}{5}.$$

[1 punto]

(b) Defina $g(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{5}$ y utilice la iteración de punto fijo con $x_0 = 0{,}2$ y $x_{n+1} = g(x_n)$ para hallar

(i) x_1;

(ii) la solución de $h(x) = 2$ cercana a $x = 0{,}2$.

[3 puntos]

Exprese **ambas** respuestas con una precisión de **cinco** cifras significativas.

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(c) (i) Halle $g'(x)$.

(ii) Calcule

(a) $g'(0{,}2)$;

(b) $g'(1{,}2)$.

(iii) Explique por qué la iteración de punto fijo con $g(x)$ no converge a la solución cercana a $x = 1{,}2$ independientemente del valor de x_0 utilizado. *[6 puntos]*

(d) Utilizando cualquier otro método, halle la solución cercana a $x = 1{,}2$, con una precisión de **seis** cifras significativas. *[2 puntos]*

(e) (i) Utilizando la sustitución $u = x^2 + 1$, halle $\int \frac{10x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

(ii) Sabiendo que $\int_0^a \frac{10x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = 4$, con $a > 0$, halle a. *[8 puntos]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba la inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$. *[2 puntos]*

(b) $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{X}$ son también matrices 2×2.

(i) Sabiendo que $\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, esprese $\boldsymbol{X}$ en función de $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

(ii) Sabiendo que $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$, halle $\boldsymbol{X}$. *[4 puntos]*

(ii) La matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ -0{,}8 & 1{,}4 \end{pmatrix}$ representa una transformación.

(a) Calcule el factor escala del área de esta transformación. *[2 puntos]*

Considere el cuadrado de vértices $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 3)$ y $\mathrm{C}(-2, 1)$.

(b) Las imágenes de O, A, B y C mediante la transformación $\boldsymbol{M}$ son respectivamente O', A', B' y C'. La coordenadas de O' son $(0, 0)$. Las coordenadas de B' son $(0, 5)$.

(i) Halle las coordenadas de

(a) A';

(b) C'.

(ii) Haga un dibujo aproximado del cuadrado OABC y del paralelogramo $\mathrm{O}'\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$.

(iii) **A partir de lo anterior**, dé una descripción geométrica completa de $\boldsymbol{M}$. *[8 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(c) La recta de ecuación $y = 2x$ forma un ángulo θ con el eje x.

(i) Compruebe que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(ii) Halle una expresión similar para $\operatorname{sen}\theta$. *[3 puntos]*

(d) Sean $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

(i) Dé una descripción geométrica completa de las transformaciones representadas por

(a) $\boldsymbol{P}$;

(b) $\boldsymbol{Q}$;

(c) $\boldsymbol{R}$.

(ii) Se puede comprobar que $\boldsymbol{PQR} = \boldsymbol{M}$, siendo por tanto $\boldsymbol{M}$ composición de las transformaciones $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$. ¿Qué transformación ha de aplicarse en primer lugar? *[7 puntos]*

(iii) La transformación $\boldsymbol{T}$ dada por

$$\boldsymbol{T} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4{,}4 \\ 8{,}8 \end{pmatrix}$$

representa una simetría con respecto a una recta que **no** pasa por el origen. Halle la ecuación de esta recta en la forma $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *[4 puntos]*