

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 2

9 de mayo de 2023

Zona A tarde | Zona B mañana | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

Un botánico realiza un experimento en el que estudia el crecimiento de las plantas.

La altura de las plantas la mide en siete días distintos.

En la siguiente tabla se muestra el número de días (d) que lleva en marcha el experimento y la altura promedio (h cm) que tienen las plantas cada uno de esos días.

Número de días (d)	2	5	13	24	33	37	42
Altura promedio (h)	10	16	30	59	76	79	82

Para estos datos, el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r) es 0,991, redondeando a tres cifras significativas.

(a) La recta de regresión de h sobre d para estos datos se puede escribir en la forma $h = ad + b$.

Halle el valor de a y el valor de b . [2]

(b) Utilice su recta de regresión para estimar la altura promedio que tendrán las plantas cuando el experimento lleve en marcha 20 días. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

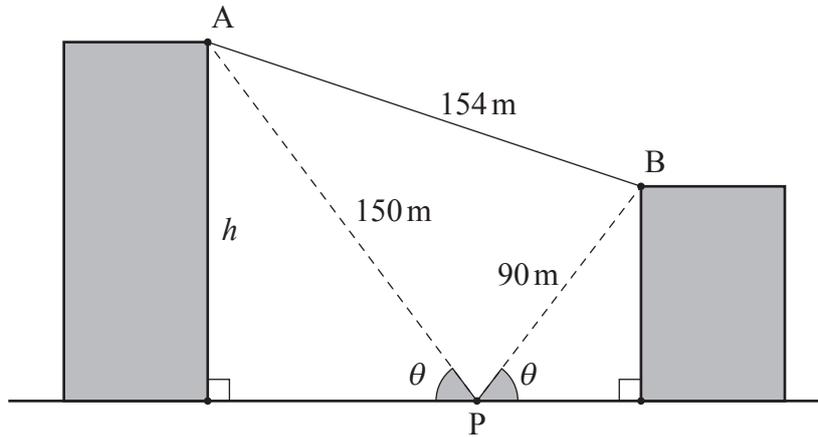


2. [Puntuación máxima: 6]

En la siguiente figura se muestran dos edificios construidos en un terreno llano.

Desde el punto P —situado en el suelo y entre los dos edificios— el ángulo de elevación hasta la parte superior de cada edificio es igual a θ .

la figura no está dibujada a escala



La distancia entre el punto P y el punto A (ubicado en la parte superior del edificio más alto) es igual a 150 metros.

La distancia entre el punto P y el punto B (ubicado en la parte superior del edificio más bajo) es igual a 90 metros.

La distancia entre A y B es igual a 154 metros.

Halle la altura (h) del edificio más alto.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

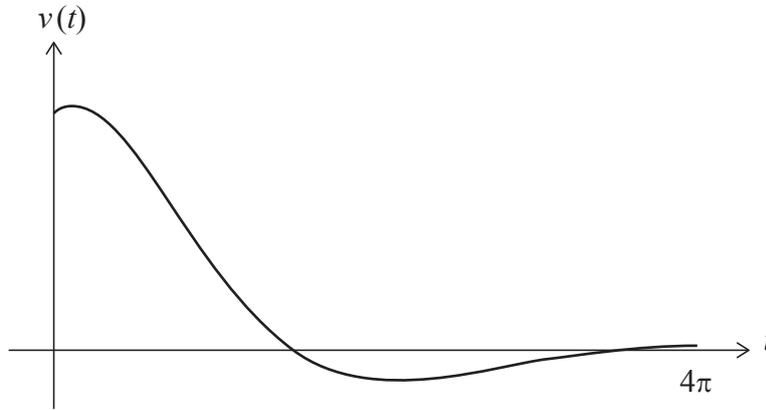


Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 6]

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que su velocidad ($v \text{ m s}^{-1}$) en el instante t segundos viene dada por $v(t) = 4e^{-\frac{t}{3}} \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, para $0 \leq t \leq 4\pi$.

El gráfico de v se muestra en la siguiente figura.



Sea t_1 el primer instante en el que la **aceleración** de la partícula es igual a cero.

(a) Halle el valor de t_1 . [2]

Sea t_2 el **segundo** instante en el que la partícula está instantáneamente en reposo.

(b) Halle el valor de t_2 . [2]

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre $t = t_1$ y $t = t_2$. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP10

No escriba soluciones en esta página.

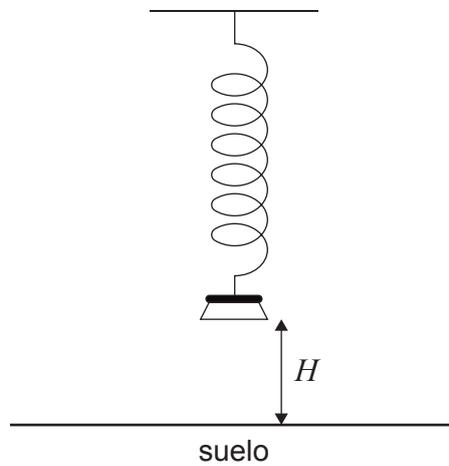
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 13]

Hay un peso suspendido de un muelle. Se tira del peso y luego se suelta, de modo que se mueva hacia arriba y hacia abajo en vertical.

La altura (H metros) a la que se encuentra la base del peso respecto al suelo se puede modelizar mediante la función $H(t) = a \cos(7,8t) + b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 10$, donde t es el tiempo (en segundos) que ha transcurrido desde que se soltó el peso.



(a) Halle el período de la función.

[2]

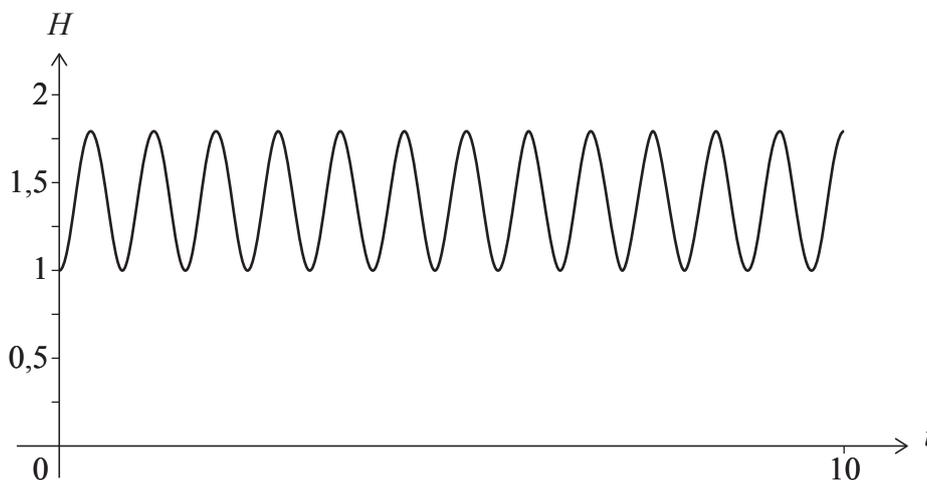
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

El peso se suelta cuando su base está a una altura mínima de 1 metro respecto al suelo y alcanza una altura máxima de 1,8 metros respecto al suelo. En la siguiente figura se muestra el gráfico de H .



- (b) Halle el valor de:
 - (i) a
 - (ii) b [3]
 - (c) Halle el número de veces que el peso alcanza su altura máxima durante los cinco primeros segundos que está moviéndose. [2]
 - (d) Halle el primer instante en el que la base del peso alcanza una altura de 1,5 metros. [2]
- Se configura una cámara para que haga una foto del peso en un instante elegido al azar, dentro de esos cinco primeros segundos que el peso está moviéndose.
- (e) Halle la probabilidad de que la altura de la base del peso sea mayor que 1,5 metros en el instante en el que se hace la foto. [4]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

Hay un juego en el que hay que extraer al azar **dos** bolas de una caja, sin reposición. Inicialmente la caja contiene r bolas rojas e y bolas amarillas.

Sea $P(YY)$ la probabilidad de extraer de la caja (sin reposición) dos bolas amarillas.

Considere ahora una versión de este juego donde se sabe que $P(YY) = \frac{1}{3}$.

(a) Muestre que $2y^2 - 2(r + 1)y + r - r^2 = 0$. [4]

(b) Resolviendo la ecuación del apartado (a), muestre que $y = \frac{(r+1) + \sqrt{3r^2 + 1}}{2}$. [4]

(c) Halle dos pares de valores de r e y que satisfagan la condición $P(YY) = \frac{1}{3}$. [4]

Considere ahora un juego de azar similar al anterior, en el que hay que extraer **tres** bolas de una caja, sin reposición. Inicialmente la caja contiene 10 bolas rojas e y bolas amarillas.

Sea $P(YYY)$ la probabilidad de extraer de la caja (sin reposición) tres bolas amarillas.

(d) Halle una expresión que dé $P(YYY)$ en función de y . [3]

Ahora se añade a la caja una bola amarilla, de modo que contenga 10 bolas rojas e $(y + 1)$ bolas amarillas.

La probabilidad de extraer de la caja (sin reposición) tres bolas amarillas es ahora el doble que la probabilidad dada en el apartado (d).

(e) Halle el número de bolas amarillas que había inicialmente en la caja. [5]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 21]

Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$, donde $x > 0, y > 0$.

Se sabe que $y = 2$ para $x = 1$.

(a) Utilice el método de Euler con un paso de 0,1 para hallar un valor aproximado de y para $x = 1,1$. [2]

(b) Resolviendo la ecuación diferencial, muestre que $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$. [8]

(c) Halle el valor de y para $x = 1,1$. [1]

(d) Haciendo referencia a la concavidad del gráfico de $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ para $1 \leq x \leq 1,1$, explique por qué el valor de y que ha hallado en el apartado (c) es mayor que el valor aproximado de y que halló en el apartado (a). [2]

El gráfico de $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ para $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ tiene un punto de inflexión en el punto P.

(e) Dibujando aproximadamente el gráfico de una derivada apropiada de y , determine la coordenada x de P. [2]

Se puede mostrar que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^4 + x^2y^2 + 6y^4}{x^2y^3}$, donde $x > 0, y > 0$.

(f) Utilice esta expresión de $\frac{d^2y}{dx^2}$ para mostrar que el punto P pertenece a la recta $y = mx$, y determine además el valor exacto de m . [6]

Fuentes:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16