

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 3

9 de mayo de 2023

Zona A tarde | Zona B mañana | Zona C tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 24]

En esta pregunta le pediremos que analice el número y las características de los puntos de intersección del gráfico de $y = \log_a x$ (donde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) con la recta $y = x$ para determinados conjuntos de valores de a .

En esta pregunta puede o bien utilizar la fórmula para cambiar de base un logaritmo

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ o la función “cambio de base del logaritmo” que trae la calculadora de pantalla gráfica.

La función f viene dada por:

$$f(x) = \log_a x \text{ donde } x \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1.$$

(a) Considere los casos $a = 2$ y $a = 10$. En los mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente los siguientes tres gráficos:

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_{10} x$$

$$y = x.$$

Rotule claramente cada gráfico con su ecuación correspondiente e indique el valor de todas las intersecciones con el eje x que sean distintas de cero.

[4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

En los apartados (b) y (c), considere el caso concreto en el que $a = e$. Tenga presente que $\ln x \equiv \log_e x$.

- (b) Utilice el análisis para hallar el valor mínimo de la expresión $x - \ln x$, y justifique por qué este valor es un mínimo. [5]
- (c) A partir de lo anterior, deduzca que $x > \ln x$. [1]
- (d) Existen valores de a para los cuales el gráfico de $y = \log_a x$ y la recta $y = x$ sí que tienen puntos de intersección. En la siguiente tabla se dan tres intervalos para el valor de a .

Intervalo	Número de puntos de intersección
$0 < a < 1$	p
$1 < a < 1,4$	q
$1,5 < a < 2$	r

Investigando el gráfico de $y = \log_a x$ para distintos valores de a , escriba el valor de p , de q y de r . [4]

En los apartados (e) y (f), considere $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Para $1,4 \leq a \leq 1,5$, existe un valor de a para el cual la recta $y = x$ es tangente al gráfico de $y = \log_a x$ en un determinado punto P.

- (e) Halle las coordenadas exactas de P y el valor exacto de a . [8]
- (f) Escriba el conjunto exacto de valores de a para los cuales los gráficos de $y = \log_a x$ y de $y = x$:
 - (i) Tienen dos puntos de intersección [1]
 - (ii) No tienen ningún punto de intersección [1]

2. [Puntuación máxima: 31]

En esta pregunta le pedimos que examine diversas funciones lineales y cuadráticas que se han construido de manera sistemática utilizando progresiones aritméticas.

Considere la función $L(x) = mx + c$ para $x \in \mathbb{R}$ donde $m, c \in \mathbb{R}$ y $m, c \neq 0$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ la raíz de $L(x) = 0$.

Si m, r y c , —en ese orden— siguen una progresión aritmética (PA), en ese caso se dice que $L(x)$ es una función lineal-PA.

(a) Muestre que $L(x) = 2x - 1$ es una función lineal-PA. [2]

Considere $L(x) = mx + c$.

(b) (i) Muestre que $r = -\frac{c}{m}$. [1]

(ii) Sabiendo que $L(x)$ es una función lineal-PA, muestre que $L(x) = mx - \frac{m^2}{m+2}$. [4]

(iii) Indique todas las restricciones adicionales que tenga el valor de m . [1]

Solo hay tres conjuntos de valores **enteros** de m, r y c , con los que se pueda formar una función lineal-PA. Con uno de ellos se forma la función $L(x) = -x - 1$.

(c) Utilice el apartado (b) para determinar las otras dos funciones lineales-PA que tienen valores enteros de m, r y c . [3]

Considere ahora la función $Q(x) = ax^2 + bx + c$ para $x \in \mathbb{R}$ donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$.

Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ las raíces de $Q(x) = 0$.

(d) Escriba una expresión para:

(i) La suma de las raíces $(r_1 + r_2)$ en función de a y b [1]

(ii) El producto de las raíces $(r_1 r_2)$ en función de a y c [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Si a , r_1 , b , r_2 y c , —en ese orden— siguen una progresión aritmética (PA), en ese caso se dice que $Q(x)$ es una función cuadrática-PA.

(e) Sabiendo que $Q(x)$ es una función cuadrática-PA:

(i) Escriba una expresión para $r_2 - r_1$ en función de a y b ; [1]

(ii) Utilice las respuestas dadas en los apartados (d)(i) y (e)(i) para mostrar que $r_1 = \frac{a^2 - ab - b}{2a}$; [2]

(iii) Utilice el resultado del apartado (e)(ii) para mostrar que $b = 0$ o $a = -\frac{1}{2}$. [3]

Considere el caso en el que $b = 0$.

(f) Determine las dos funciones cuadráticas-PA que satisfacen esta condición. [5]

Considere ahora el caso en el que $a = -\frac{1}{2}$.

(g) (i) Halle una expresión que dé r_1 en función de b . [2]

(ii) A partir de lo anterior (o de cualquier otro modo alternativo), determine los valores exactos de b y de c con los que se pueden formar funciones cuadráticas-PA.

Dé las respuestas en la forma $\frac{-p \pm q\sqrt{s}}{2}$ donde $p, q, s \in \mathbb{Z}^+$. [5]

Fuentes:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023