Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 1

1 mai 2024

Zone A après-midi | **Zone B** après-midi | **Zone C** après-midi

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2224 – 9705

16 pages

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

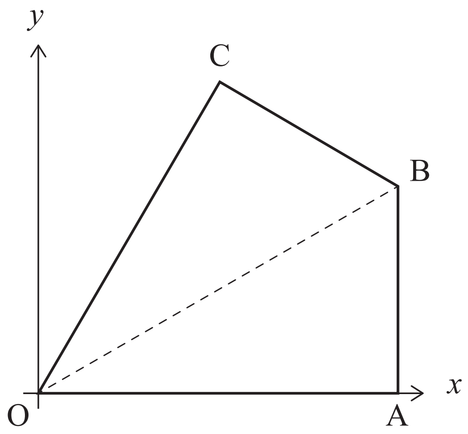
Résolvez $\tan(2x - 5°) = 1$ pour $0° \leq x \leq 180°$.

2. [Note maximale : 5]

Résolvez $3 \times 9^x + 5 \times 3^x - 2 = 0$.

3. [Note maximale : 7]

Le quadrilatère OABC est montré sur le système d'axes suivant.



OABC est symétrique par rapport à $[\mathrm{OB}]$.

Les coordonnées de A sont $(6\,,\,0)$ et celles de C sont $\left(3\,,\,3\sqrt{3}\right)$.

(a) (i) Écrivez les coordonnées du milieu de $[\mathrm{AC}]$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez l'équation de la droite passant par les points O et B . [4]

(b) Sachant que $[\mathrm{OA}]$ est perpendiculaire à $[\mathrm{AB}]$, trouvez l'aire du quadrilatère OABC. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

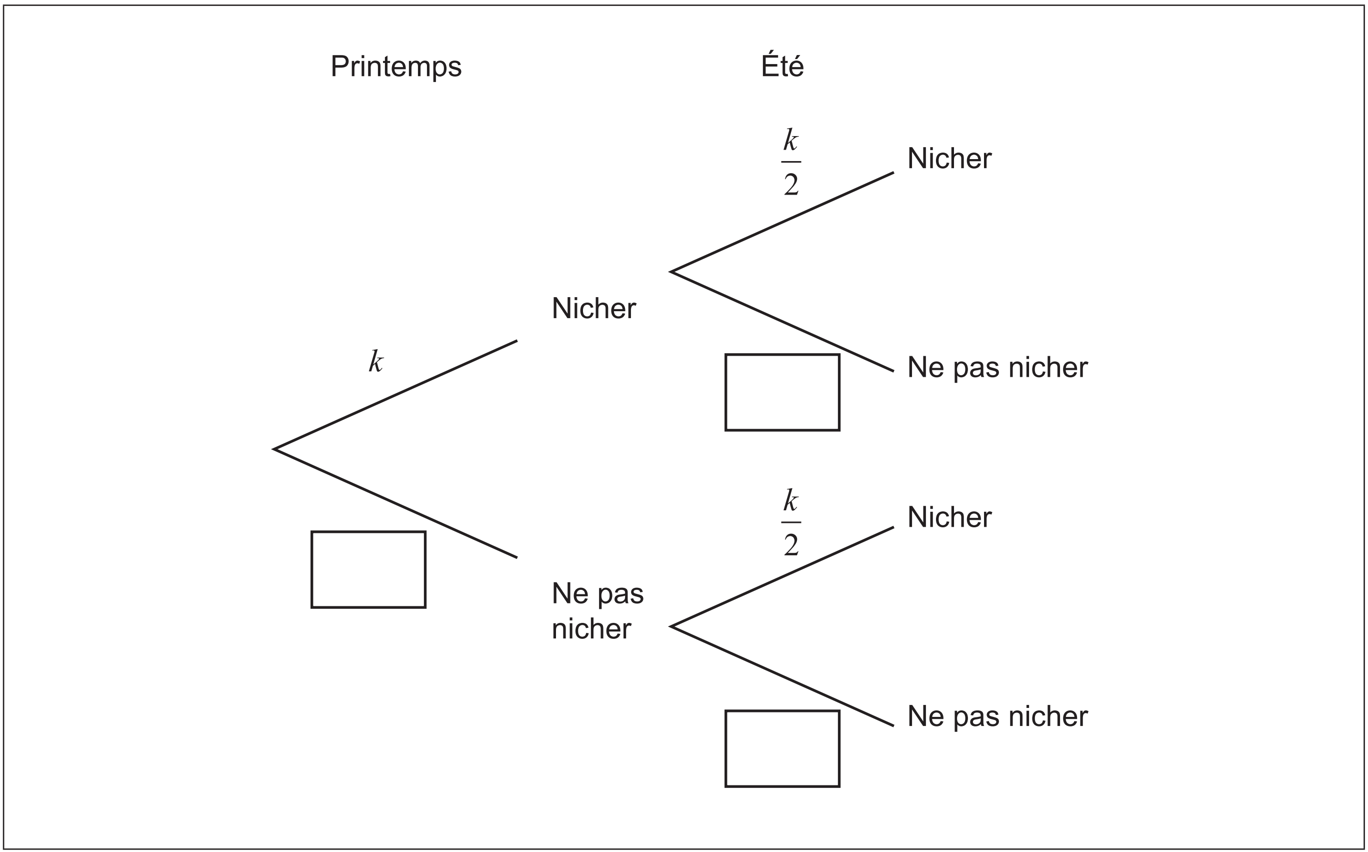
4. [Note maximale : 6]

Une espèce d'oiseau peut nicher au cours de deux saisons : le printemps et l'été.

La probabilité de nicher au printemps est k.

La probabilité de nicher en été est $\frac{k}{2}$.

Ceci est montré dans le diagramme en arbre suivant.



(a) Complétez le diagramme en arbre pour montrer les probabilités de ne pas nicher au cours de chaque saison. Écrivez vos réponses en fonction de k. [2]

On sait que la probabilité de ne pas nicher au printemps et de ne pas nicher en été est $\frac{5}{9}$.

(b) (i) Montrez que $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

(ii) On sait que $k = \frac{1}{3}$ et $k = \frac{8}{3}$ satisfont $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

Indiquez pourquoi $k = \frac{1}{3}$ est la seule solution valide. [4]

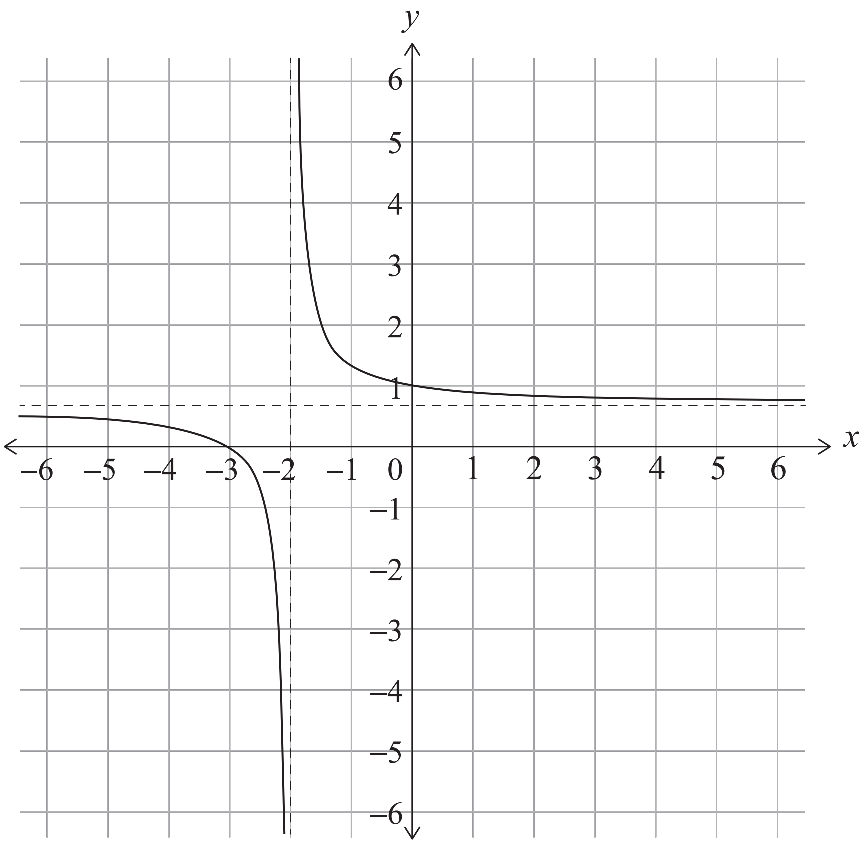
(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

5. [Note maximale : 8]

Une fonction f est définie par $f\left(x\right)=\dfrac{2\left(x+3\right)}{3\left(x+2\right)}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$.

La représentation graphique de $y = f(x)$ est montrée ci-dessous.



(a) Écrivez l'équation de l'asymptote horizontale. [1]

Considérez $g(x) = mx + 1$, où $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

(b) (i) Écrivez le nombre de solutions de $f(x) = g(x)$ pour $m > 0$.

(ii) Déterminez la valeur de m telle que $f(x) = g(x)$ a une seule solution pour x.

(iii) Déterminez la plage de valeurs pour m, où $f(x) = g(x)$ a deux solutions pour $x \geq 0$. [7]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

6. [Note maximale : 5]

Un agriculteur cultive deux types de pommes : des pommes à cuire et des pommes de table (à couteau ou à croquer). Les poids des pommes, en grammes, peuvent être modélisés par des distributions normales avec les paramètres suivants.

Type de pomme	**Moyenne μ**	**Écart type σ**
Pomme de table	$100\,\mathrm{g}$	$20\,\mathrm{g}$
Pomme à cuire	$140\,\mathrm{g}$	$40\,\mathrm{g}$

Pour chaque type de pomme, vous pouvez supposer que $95\,\%$ des poids se situent à moins de deux écarts types de la moyenne.

(a) Trouvez le pourcentage de pommes de table dont le poids est supérieur à $140\,\mathrm{g}$. [1]

L'agriculteur cultive un grand nombre de pommes dont $80\,\%$ sont des pommes de table.

Les deux types de pommes sont cueillies et mélangées au hasard dans une machine pour les nettoyer.

Après le nettoyage, la machine sépare celles dont le poids est supérieur à $140\,\mathrm{g}$ dans un contenant à part.

(b) Une pomme est choisie au hasard dans ce contenant. Trouvez la probabilité qu'il s'agisse d'une pomme de table. Donnez votre réponse sous la forme $\frac{c}{d}$, où $c, d \in \mathbb{Z}^+$. [4]

7. [Note maximale : 7]

Une fonction $g(x)$ est définie par $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + dx - e$, où $d, e \in \mathbb{R}$.

α, β et γ sont les trois racines de l'équation $g(x) = 0$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Écrivez la valeur de $\alpha + \beta + \gamma$. [1]

Une fonction $h(z)$ est définie par $h(z) = 2z^5 - 11z^4 + rz^3 + sz^2 + tz - 20$, où $r, s, t \in \mathbb{R}$.

α, β et γ sont également les racines de l'équation $h(z) = 0$.

On sait que $h(z) = 0$ est satisfaite par le nombre complexe $z = p + 3\mathrm{i}$.

(b) Montrez que $p = 1$. [3]

On sait maintenant que $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha < \beta$ et $\gamma \in \mathbb{Q}$.

(c) (i) Trouvez la valeur du produit $\alpha\beta$.

(ii) Écrivez la valeur de α et la valeur de β. [3]

8. [Note maximale : 6]

Utilisez la règle de L'Hôpital pour trouver $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sec^4 x - \cos^2 x}{x^4 - x^2}$.

9. [Note maximale : 7]

Un enseignant emmène n élèves en excursion scolaire. Les élèves sont répartis au hasard en deux groupes.

Pour des raisons de sécurité, il doit y avoir exactement trois élèves dans le premier groupe et au moins trois élèves dans le deuxième groupe.

L'enseignant choisira au hasard trois élèves pour former le premier groupe et les autres élèves formeront le deuxième groupe.

(a) Écrivez une expression pour le nombre de façons dont les élèves pourraient être répartis. [1]

Deux des élèves demandent à l'enseignant de ne pas travailler dans le même groupe.

L'enseignant est d'accord et trouve que le nombre de façons de répartir les élèves est désormais réduit de moitié.

(b) Déterminez la valeur de n. [6]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 16]

Considérez la suite arithmétique a, p, q …, où a, p, $q \neq 0$.

(a) Montrez que $2p - q = a$. [2]

Considérez la suite géométrique a, s, t …, où a, s, $t \neq 0$.

(b) Montrez que $s^2 = at$. [2]

Le premier terme de chaque suite est a.

On sait que $q = t = 1$.

(c) Montrez que $p > \frac{1}{2}$. [2]

Considérez le cas où $a = 9$, $s > 0$ et $q = t = 1$.

(d) Écrivez les quatre premiers termes de

(i) la suite arithmétique ;

(ii) la suite géométrique. [4]

La suite arithmétique et la suite géométrique sont utilisées pour former une nouvelle suite arithmétique u_n.

Les trois premiers termes de u_n sont $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$ et $u_3 = 1 + \ln 1$.

(e) (i) Trouvez la raison de la nouvelle suite en fonction de $\ln 3$.

(ii) Montrez que $\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25\ln 3$. [6]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 19]

L’équation du plan Π_1 est $2x+6y-2z=5$.

(a) Vérifiez que le point $\mathrm{A}\left(2\,,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$ est situé sur le plan Π_1. [1]

Le plan Π_2 est donné par $(k^2-6)x+(2k+3)y+pz=q$, où p, q, $k\in\mathbb{R}$ et $p\neq 0$.

(b) Dans le cas où $p=-6$, Π_2 est perpendiculaire à Π_1 et A est situé sur Π_2.
Trouvez la valeur de k et la valeur de q. [5]

Pour les parties (c), (d) et (e), on sait maintenant que Π_2 est parallèle à Π_1 avec $k=3$.

(c) Déterminez la valeur de p. [2]

On sait également que $q=-\frac{51}{2}$.

La droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à Π_1 coupe Π_2 au point B.

(d) (i) Trouvez les coordonnées de B.

(ii) À partir de là, montrez que la distance perpendiculaire entre Π_1 et Π_2 est $\sqrt{11}$. [7]

(e) Trouvez l’équation d’un troisième plan parallèle Π_3 qui se trouve également à une distance perpendiculaire de $\sqrt{11}$ de Π_1. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 20]

(a) Soit $f(x)=(1-ax)^{-\frac{1}{2}}$, où $ax<1$, $a\neq 0$.

La $n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(x)$ est notée $f^{(n)}(x)$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$.

Démontrez par récurrence que $f^{(n)}(x)=\dfrac{a^{n}(2n-1)!(1-ax)^{-\frac{2n+1}{2}}}{2^{2n-1}(n-1)!}$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$. [8]

(b) En utilisant la partie (a) ou par toute autre méthode, montrez que la série de Maclaurin pour $f(x)=(1-ax)^{-\frac{1}{2}}$ jusqu’au terme en x^{2} et incluant ce dernier est $1+\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{3}{8}a^{2}x^{2}$. [2]

(c) À partir de là, montrez que $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\approx\dfrac{2+6x+19x^{2}}{2}$. [4]

(d) Sachant que le développement en série pour $(1-ax)^{-\frac{1}{2}}$ converge pour $|ax|<1$, indiquez la restriction qui doit être imposée sur x pour que l’approximation $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\approx\dfrac{2+6x+19x^{2}}{2}$ soit valide. [1]

(e) Utilisez $x=\dfrac{1}{10}$ pour déterminer une valeur approximative de $\sqrt{3}$.

Donnez votre réponse sous la forme $\dfrac{c}{d}$, où c, $d\in\mathbb{Z}^{+}$. [5]