Mathématiques : analyse et approches
Niveau moyen
Épreuve 1

1 mai 2024

Zone A après-midi | **Zone B** après-midi | **Zone C** après-midi

Numéro de session du candidat

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches NM** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.

2224 – 9708
15 pages

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

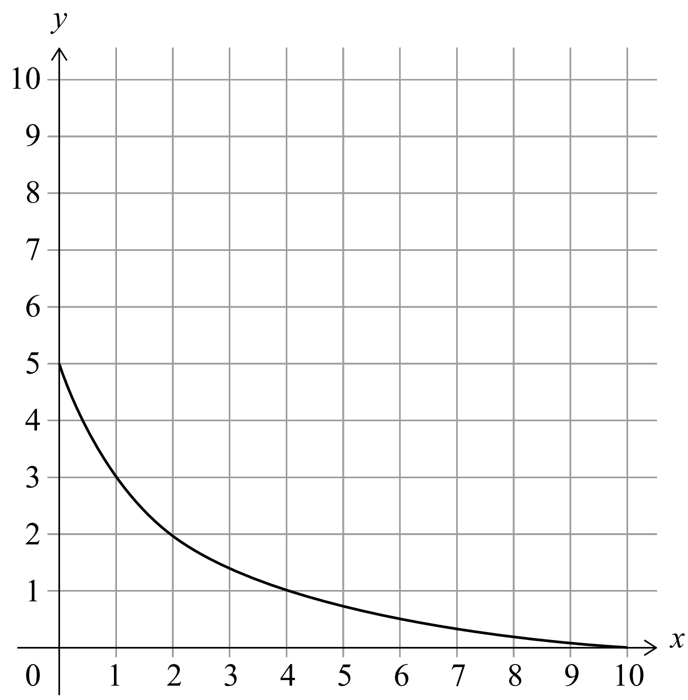
Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

La représentation graphique de $y = f(x)$ pour $0 \le x \le 10$ est montrée dans le diagramme suivant.

La représentation graphique coupe les axes aux points $(10, 0)$ et $(0, 5)$.



(a) Écrivez la valeur de

(i) $f(4)$;

(ii) $f \circ f(4)$;

(iii) $f^{-1}(3)$. [3]

(b) Sur le système d'axes ci-dessus, esquissez la représentation graphique de $y = f^{-1}(x)$. Montrez clairement où la représentation graphique coupe les axes. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

2. [Note maximale : 4]

Résolvez $\tan(2x - 5°) = 1$ pour $0° \leq x \leq 180°$.

3. [Note maximale : 5]

(a) Résolvez $3m^2 + 5m - 2 = 0$. [3]

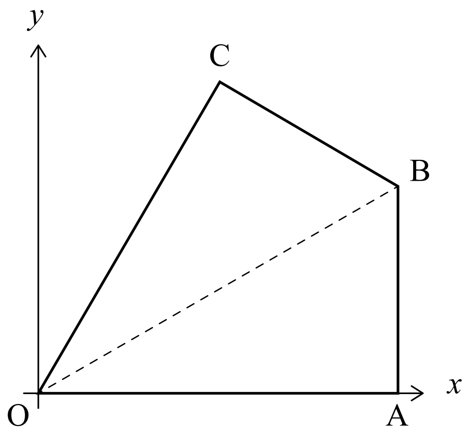
(b) À partir de là ou par toute autre méthode, résolvez $3 \times 9^x + 5 \times 3^x - 2 = 0$. [2]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

4. [Note maximale : 7]

Le quadrilatère OABC est montré sur le système d'axes suivant.



OABC est symétrique par rapport à $[\mathrm{OB}]$.

Les coordonnées de A sont $(6, 0)$ et celles de C sont $\left(3, 3\sqrt{3}\right)$.

(a) (i) Écrivez les coordonnées du milieu de $[\mathrm{AC}]$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez l'équation de la droite passant par les points O et B. [4]

(b) Sachant que $[\mathrm{OA}]$ est perpendiculaire à $[\mathrm{AB}]$, trouvez l'aire du quadrilatère OABC. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

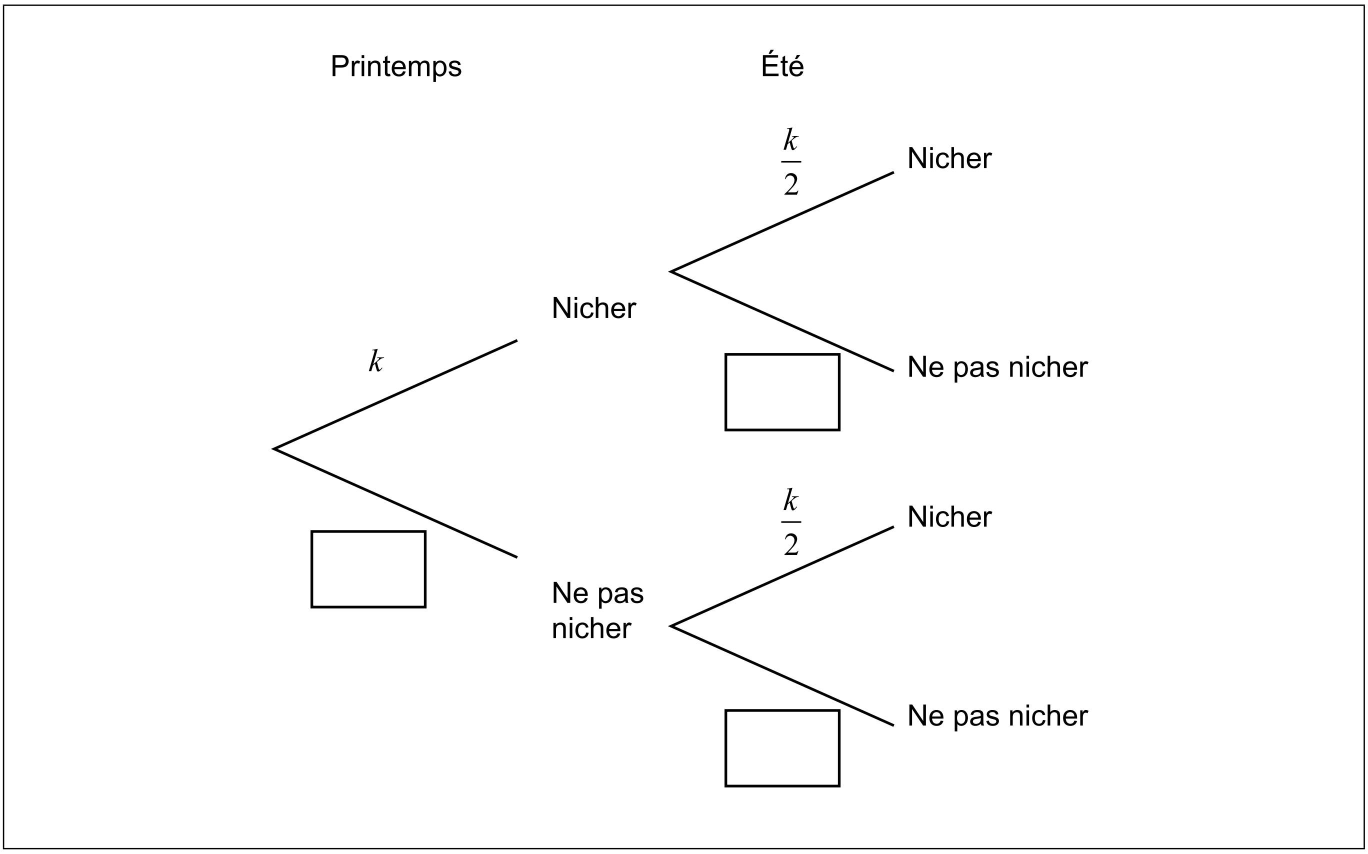
5. [Note maximale : 6]

Une espèce d'oiseau peut nicher au cours de deux saisons : le printemps et l'été.

La probabilité de nicher au printemps est k.

La probabilité de nicher en été est $\frac{k}{2}$.

Ceci est montré dans le diagramme en arbre suivant.



(a) Complétez le diagramme en arbre pour montrer les probabilités de ne pas nicher au cours de chaque saison. Écrivez vos réponses en fonction de k. [2]

On sait que la probabilité de ne pas nicher au printemps et de ne pas nicher en été est $\frac{5}{9}$.

(b) (i) Montrez que $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

(ii) On sait que $k = \frac{1}{3}$ et $k = \frac{8}{3}$ satisfont $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

Indiquez pourquoi $k = \frac{1}{3}$ est la seule solution valide. [4]

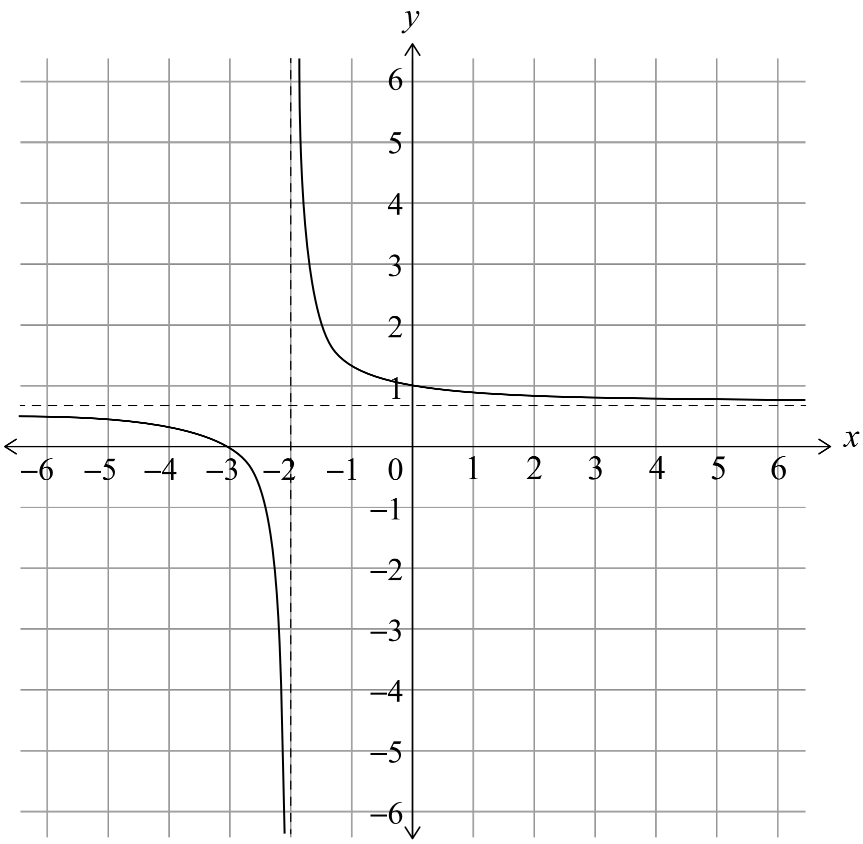
(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

6. [Note maximale : 8]

Une fonction f est définie par $f\left(x\right)=\dfrac{2\left(x+3\right)}{3\left(x+2\right)}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$.

La représentation graphique de $y = f(x)$ est montrée ci-dessous.



(a) Écrivez l'équation de l'asymptote horizontale. [1]

Considérez $g(x) = mx + 1$, où $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

(b) (i) Écrivez le nombre de solutions de $f(x) = g(x)$ pour $m > 0$.

(ii) Déterminez la valeur de m telle que $f(x) = g(x)$ a une seule solution pour x.

(iii) Déterminez la plage de valeurs pour m, où $f(x) = g(x)$ a deux solutions pour $x \geq 0$. [7]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

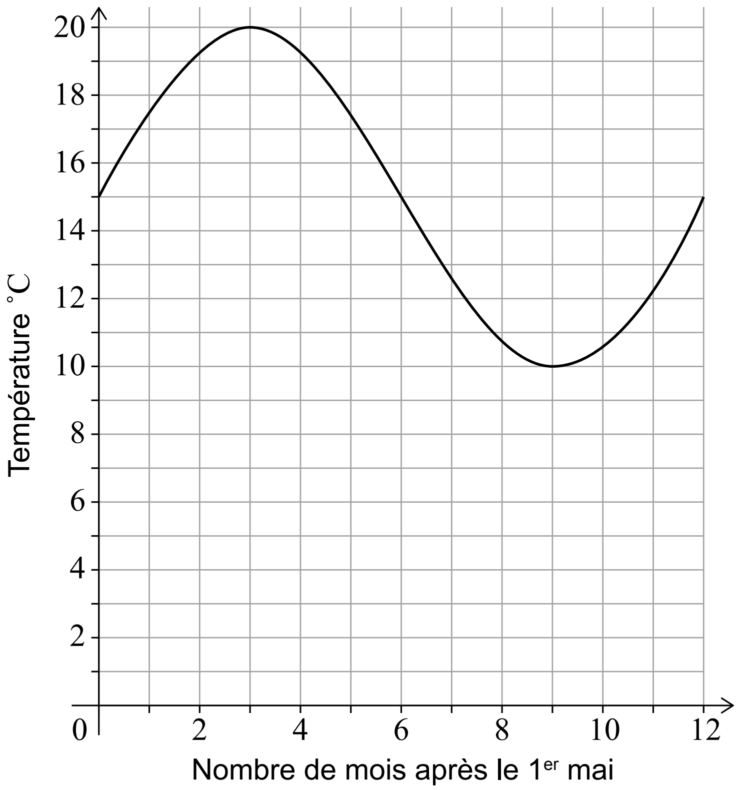
Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

7. [Note maximale : 12]

Alex nage dans la mer que si la température de l’eau est d’au moins $15°\mathrm{C}$. Alex va à la mer près de chez lui pour la première fois chaque année au début du mois de mai, lorsque l’eau devient suffisamment chaude.

Alex modélise la température de l’eau de mer à midi avec la fonction $f(x) = a\sin bx + \mathrm{c}$ pour $0 \le x \le 12$, où x est le nombre de mois après le 1er mai et où a, b, $c > 0$.

La représentation graphique de $y = f(x)$ est montrée dans le diagramme suivant.



(Suite de la question à la page suivante)

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 7)

(a) Montrez que $b = \frac{\pi}{6}$. [1]

(b) Écrivez la valeur de

(i) a ;

(ii) c. [2]

Alex part en vacances et modélise la température de l’eau de mer à midi sur le lieu de ses vacances avec la fonction $g(x) = 3{,}5\sin\frac{\pi}{6}x + 11$, où $0 \leq x \leq 12$ et x est le nombre de mois après le 1er mai.

(c) En utilisant ce nouveau modèle $g(x)$,

(i) trouvez la température de l’eau de mer à midi le 1er octobre, cinq mois après le 1er mai.

(ii) montrez que la température de l’eau de mer à midi n’est jamais assez chaude pour qu’Alex puisse nager. [6]

(d) Alex compare les deux modèles et trouve que $g(x) = 0{,}7f(x) + q$. Déterminez la valeur de q. [3]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

8. [Note maximale : 17]

La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Montrez que $x^2 + 2x + 2 > 0$ pour toutes les valeurs de x.

(ii) À partir de là, trouvez les valeurs de x pour lesquelles f est croissante. [3]

(b) (i) Écrivez la valeur de x pour laquelle $f'(x) = 0$.

(ii) Montrez que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x}{(x^2+2x+2)^2}$.

(iii) À partir de là, justifiez que la valeur de x trouvée dans la partie (b)(i) correspond à un minimum relatif sur la représentation graphique de f. [7]

On sait que $f(2) = 3 + \ln 10$.

(c) Trouvez une expression pour $f(x)$. [4]

(d) Trouvez l’équation de la droite normale à la représentation graphique de f au point $(2\,,\,3 + \ln 10)$. [3]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

9. [Note maximale : 16]

Considérez la suite arithmétique a, p, q …, où a, p, $q \neq 0$.

(a) Montrez que $2p - q = a$. [2]

Considérez la suite géométrique a, s, t …, où a, s, $t \neq 0$.

(b) Montrez que $s^2 = at$. [2]

Le premier terme de chaque suite est a.

On sait que $q = t = 1$.

(c) Montrez que $p > \dfrac{1}{2}$. [2]

Considérez le cas où $a = 9$, $s > 0$ et $q = t = 1$.

(d) Écrivez les quatre premiers termes de

(i) la suite arithmétique ;

(ii) la suite géométrique. [4]

La suite arithmétique et la suite géométrique sont utilisées pour former une nouvelle suite arithmétique u_n.

Les trois premiers termes de u_n sont $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$ et $u_3 = 1 + \ln 1$.

(e) (i) Trouvez la raison de la nouvelle suite en fonction de $\ln 3$.

(ii) Montrez que $\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25\ln 3$. [6]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.