Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 2

2 mai 2024

Zone A matin | **Zone B** matin | **Zone C** matin

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2224 – 9706

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Les fonctions f et g sont définies pour $-1 \leq x \leq 0$ par

$$f(x) = 1 - x^2$$

$$g(x) = e^{2x}.$$

Les représentations graphiques de f et g se coupent en $x = a$ et $x = b$, où $a < b$.

(a) Trouvez la valeur de a et la valeur de b. [3]

(b) Trouvez l'aire de la région délimitée par les représentations graphiques de f et g. [3]

2. [Note maximale : 5]

Considérez l'ensemble de données à deux variables suivant, où $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

x	5	6	6	8	10
y	9	13	p	q	21

L'équation de la droite de régression pour y en fonction de x est $y = 2,1875x + 0,6875$.

La droite de régression passe par le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$.

(a) Sachant que $\overline{x} = 7$, vérifiez que $\overline{y} = 16$. [1]

(b) Sachant que $q - p = 3$, trouvez la valeur de p et la valeur de q. [4]

3. [Note maximale : 6]

La sonie d'un son, L, mesurée en décibels, est liée à son intensité, I unités, par $L = 10\log_{10}(I \times 10^{12})$.

Considérez deux sons, S_1 et S_2.

L'intensité de S_1 est de 10^{-6} unités et sa sonie est de 60 décibels.

L'intensité de S_2 est le double de celle de S_1.

(a) Indiquez l'intensité de S_2. [1]

(b) Déterminez la sonie de S_2. [2]

La sonie maximale du tonnerre lors d'un orage a été mesuré à 115 décibels.

(c) Trouvez l'intensité correspondante, I, du tonnerre. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. [Note maximale : 6]

Une particule se déplace en ligne droite de sorte que sa vitesse (algébrique), $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, au temps t secondes est donnée par $v(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\sin 2t}$ pour $0 \le t \le 2$.

(a) Trouvez la vitesse (algébrique) de la particule lorsque $t = 2$. [1]

(b) Trouvez la vitesse (algébrique) maximale de la particule. [2]

(c) Trouvez l'accélération de la particule à l'instant où celle-ci change de direction. [3]

5. [Note maximale : 5]

Considérez une variable aléatoire X telle que $X \sim \mathrm{B}(n\,;\,0{,}25)$.

Déterminez la plus petite valeur de n telle que $\mathrm{P}(X \geq 1) > 0{,}99$.

6. [Note maximale : 6]

Le volume d'une bulle sphérique augmente à un taux constant de $5\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$.

On peut supposer que le volume initial de la bulle est nul.

Trouvez le taux, en $\mathrm{cm\,s^{-1}}$, auquel le rayon de la bulle augmente lorsque le volume de la bulle est de $20\,\mathrm{cm^3}$.

7. [Note maximale : 5]

La courbe $y = 4\ln(x-2)$ pour $0 \le y \le 4$ subit une rotation de $360°$ autour de l'axe des ordonnées pour former un solide de révolution.

Trouvez le volume du solide formé.

8. [Note maximale : 10]

Soit $z = 1 + \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Montrez que

(i) $\arg z = \theta$;

(ii) $|z| = 2\cos\theta$. [7]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez la valeur de θ telle que $\arg(z^2) = |z^3|$. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. [Note maximale : 8]

Considérez la courbe $y = \dfrac{x-4}{ax^2+bx+c}$, où a, b et c sont des constantes non nulles.

La courbe a un minimum relatif au point $(2\,,\,1)$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Trouvez les valeurs de a, b et c.

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 15]

Un magasin vend des chocolats. Le poids, en kilogrammes, des chocolats achetés par un client choisi au hasard peut être modélisé par une variable aléatoire continue X dont la fonction de densité f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{85}\left(4+3x-x^2\right), & 0{,}5 \le x \le 3 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}.$$

(a) Trouvez le mode de X. [2]

(b) Trouvez $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$. [2]

(c) Trouvez la médiane de X. [3]

Le magasin vend ses chocolats à ses clients au prix de $25\,\$$ par kilogramme.

Cependant, si le poids des chocolats achetés par un client est d’au moins $0{,}75$ kilogramme, le magasin vend alors les chocolats à un tarif réduit de $24\,\$$ par kilogramme.

(d) Trouvez la probabilité qu’un client choisi au hasard dépense au plus $48\,\$$. [3]

(e) Trouvez le montant espéré dépensé par client. Donnez votre réponse correcte au centième de dollar près. [5]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 17]

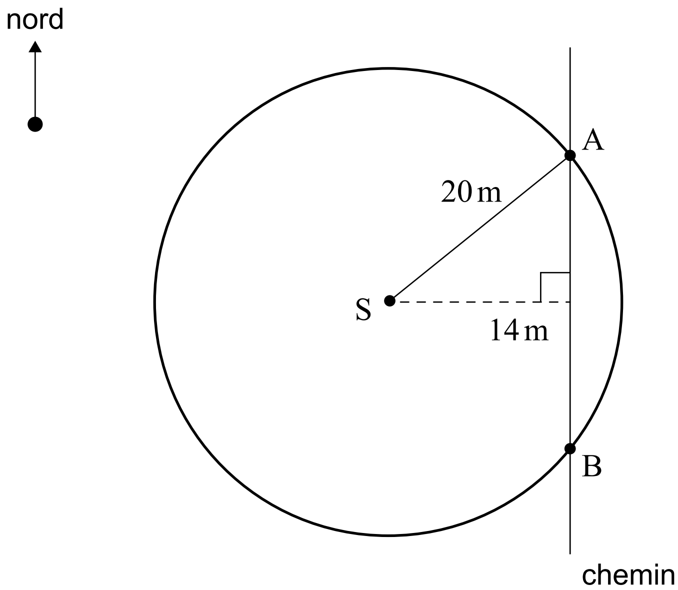
Un arroseur rotatif est placé à un point fixe S.

Il arrose tous les points à l'intérieur et sur un cercle de rayon 20 mètres.

Le point S est situé à 14 mètres du bord d'un chemin qui s'étend dans la direction nord-sud.

Le bord du chemin coupe le cercle aux points A et B.

Ces informations sont montrées dans le diagramme suivant.



(a) Montrez que $AB = 28{,}57$, réponse correcte à quatre chiffres significatifs près. [3]

L'arroseur tourne à un taux constant d'un tour toutes les 16 secondes.

(b) Montrez que l'arroseur tourne d'un angle de $\frac{\pi}{8}$ radian en une seconde. [1]

Soit T secondes, le temps pendant lequel $[AB]$ est arrosé durant chaque tour.

(c) Trouvez la valeur de T. [4]

(Suite de la question à la page suivante)

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 11)

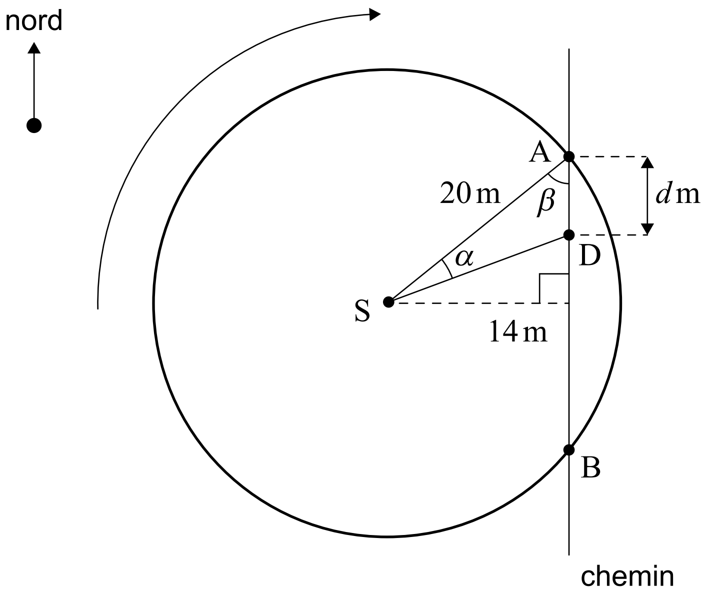
Considérez un tour de l'arroseur dans le sens horaire.

À l'instant $t = 0$, l'eau coupe le bord du chemin au point A.

À l'instant t secondes, l'eau coupe le bord du chemin en un point variable D qui se trouve à une distance de d mètres au sud du point A.

Soit $\alpha = \mathrm{A\hat{S}D}$ et $\beta = \mathrm{S\hat{A}B}$, où α, β sont mesurés en radians.

Ces informations sont montrées dans le diagramme suivant.



(d) Écrivez une expression pour α en fonction de t. [1]

On sait que $\beta = 0{,}7754$ radian, réponse correcte à quatre chiffres significatifs près.

(e) En utilisant la loi des sinus dans $\Delta\mathrm{ASD}$, montrez que la distance, d, à l'instant t, peut être modélisée par

$$d(t) = \frac{20\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)}{\sin\left(2{,}37 - \frac{\pi t}{8}\right)}.$$ [3]

(Suite de la question à la page suivante)

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 11)

Une tortue marche vers le sud le long du bord du chemin.

À l’instant t secondes, la distance à laquelle se trouve la tortue, g mètres au sud de A, peut être modélisée par

$$g(t) = 0{,}05t^2 + 1{,}1t + 18\text{, où } t \geq 0.$$

(f) À l’instant $t = 0$, indiquez à quelle distance au sud de A se trouve la tortue. [1]

Soit w la distance entre la tortue et le point D à l’instant t secondes.

(g) (i) Utilisez les expressions pour $g(t)$ et $d(t)$ pour écrire une expression pour w en fonction de t.

(ii) À partir de là, trouvez à quel instant et sur quel point du chemin l’eau atteint la tortue pour la première fois. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 21]

Considérez l’équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{cosec}2x = \sqrt{\tan x}$, où $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{4}$ en $x = \frac{\pi}{4}$.

(a) Utilisez la méthode d’Euler avec un pas de longueur $\frac{\pi}{12}$ pour trouver une valeur approximative de y lorsque $x = \frac{5\pi}{12}$.

Donnez votre réponse correcte à trois chiffres significatifs près. [3]

(b) Montrez que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln(\cot x)\right) = -\operatorname{cosec}2x$. [4]

(c) Montrez que $\sqrt{\cot x}$ est un facteur intégrant pour cette équation différentielle. [4]

(d) À partir de là, en résolvant l’équation différentielle, montrez que $y = x\sqrt{\tan x}$. [5]

(e) Considérez la courbe $y = x\sqrt{\tan x}$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et l’approximation calculée dans la partie (a) par la méthode d’Euler.

(i) Trouvez l’ordonnée en $x = \frac{5\pi}{12}$. Donnez votre réponse correcte à trois chiffres significatifs près.

(ii) En considérant la pente de la courbe, suggérez une raison pour laquelle la méthode d’Euler ne donne pas une bonne approximation de l’ordonnée en $x = \frac{5\pi}{12}$.

(iii) Indiquez pourquoi cette approximation est inférieure à la valeur de l’ordonnée en $x = \frac{5\pi}{12}$. [3]

(f) En considérant $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{cosec}2x = \sqrt{\tan x}$, déduisez que la courbe $y = x\sqrt{\tan x}$ a une pente positive pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [2]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.