Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

6 mai 2024

Zone A après-midi | **Zone B** après-midi | **Zone C** après-midi

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

2224 – 9707

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 24]

Si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables, alors leur produit est dérivable et les deux fonctions satisfont la règle de la dérivation du produit : $\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

Dans cette question, vous découvrirez des exemples de paires de fonctions dérivables, $f(x)$ et $g(x)$, qui satisfont également $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x)$.

Dans la partie (a), considérez $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, et $g(x) = x^2$, où $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Trouvez une expression pour $f'(x)$. [2]

(ii) Montrez que $f'(x)g'(x) = \dfrac{4x}{(2-x)^3}$. [2]

(iii) Montrez que $f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = \dfrac{4x}{(2-x)^3}$. [4]

Dans les parties (b) et (c), considérez deux fonctions non constantes, $f(x)$ et $g(x)$, où $f(x) > 0$ et $g(x) \neq g'(x)$.

(b) En réarrangeant l'équation $f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = f'(x)g'(x)$, montrez que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

(c) À partir de là, en intégrant les deux côtés de $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$, montrez que $f(x) = A\mathrm{e}^{\left(\int \frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)}\,\mathrm{d}x\right)}$, où A est une constante arbitraire positive. [2]

Le résultat de la partie (c) peut être utilisé pour trouver des paires de fonctions, $f(x)$ et $g(x)$, qui satisfont **les deux** équations suivantes :

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \text{ et } \left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x).$$

Dans les parties (d) et (e), utilisez le résultat de la partie (c) avec $A = 1$.

(d) Considérez $g(x) = x\mathrm{e}^{x}$.

Trouvez $f(x)$ telle que $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les deux équations ci-dessus. [5]

(e) Considérez $g(x) = \sin x + \cos x$.

Trouvez $f(x)$ telle que $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les deux équations ci-dessus à l'intérieur du domaine $0 < x < \pi$.

Donnez votre réponse sous la forme $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{x}h(x)}$, où $h(x)$ est une fonction à déterminer. [7]

2. [Note maximale : 31]

Cette question vous demande de trouver la probabilité que des représentations graphiques de fonctions du second degré générées aléatoirement aient un nombre spécifique d'abscisses à l'origine.

Dans les parties (a) à (f), considérez des fonctions du second degré, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont les coefficients, a, b et c, sont générés aléatoirement à tour de rôle en lançant trois fois un dé équilibré à six faces et en lisant la valeur indiquée sur la face supérieure du dé.

Par exemple, si on obtient à tour de rôle 2, 3 et 5, cela génère la fonction du second degré $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

(a) Expliquez pourquoi il y a 216 fonctions du second degré possibles pouvant être générées par cette méthode. [1]

(b) L'ensemble des coefficients, $a = 1$, $b = 4$ et $c = 4$, est généré aléatoirement pour former la fonction du second degré $f(x) = x^2 + 4x + 4$.

Vérifiez que cette représentation graphique de f n'a qu'une seule abscisse à l'origine. [2]

(c) En considérant le discriminant, ou par toute autre méthode, montrez que la probabilité que la représentation graphique d'une telle fonction du second degré générée aléatoirement n'ait qu'une seule abscisse à l'origine est $\frac{5}{216}$. [6]

Considérez maintenant les fonctions du second degré générées aléatoirement dont les représentations graphiques correspondantes ont deux abscisses à l'origine **distinctes**.

(d) En considérant le discriminant, déterminez l'ensemble des valeurs possibles de ac. [3]

(e) (i) Pour le cas où $ac = 1$, montrez qu'il existe quatre fonctions du second degré dont les représentations graphiques correspondantes ont deux abscisses à l'origine distinctes. [1]

(ii) Pour le cas où $ac = 2$, montrez qu'il existe huit fonctions du second degré dont les représentations graphiques correspondantes ont deux abscisses à l'origine distinctes. [2]

Soit p la probabilité que la représentation graphique d'une telle fonction du second degré générée aléatoirement ait deux abscisses à l'origine distinctes.

(f) En utilisant l'approche entamée dans la partie (e), ou par toute autre méthode, trouvez la valeur de p. [6]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Dans les parties (g) et (h), considérez une fonction du second degré générée aléatoirement, $f(x) = x^2 + 2Zx + 1$, avec la variable aléatoire continue $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

(g) Trouvez la probabilité que la représentation graphique de f ait deux abscisses à l'origine. [3]

Les variables aléatoires continues, X_1 et X_2, représentent les abscisses à l'origine de la représentation graphique de f où $X_1 = -Z - \sqrt{Z^2 - 1}$ et $X_2 = -Z + \sqrt{Z^2 - 1}$.

(h) Sachant que la représentation graphique de f a deux abscisses à l'origine, X_1 et X_2, trouvez la probabilité que X_1 et X_2 soient toutes deux supérieures à $0{,}5$. [7]