

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 1

24 de octubre de 2024

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

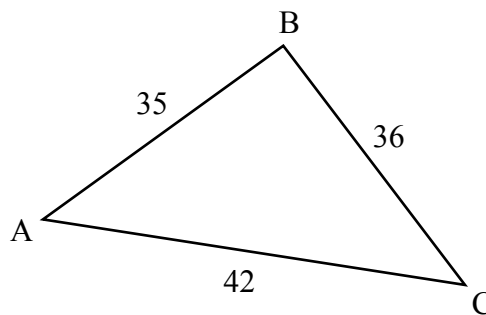


Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 5]

Considere el siguiente triángulo ABC , tal que $AB = 35$ cm, $BC = 36$ cm, y $CA = 42$ cm.

la figura no está dibujada a escala



- (a) Halle el valor de $\widehat{CAB}$. [3]
- (b) Halle el área del triángulo ABC . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 6]

El carbono radioactivo es un material que se desintegra con el tiempo.

La masa, $m(t)$, (en nanogramos), de carbono radioactivo que contiene el fósil de una planta, cuando han transcurrido t años, se puede modelizar mediante la función

$$m(t) = 120e^{-0,000121t}$$

donde t es el tiempo transcurrido desde que la planta murió.

- (a) Escriba la masa inicial del carbono radioactivo. [1]
- (b) Halle la masa del carbono radioactivo luego de 20 000 años. [2]
- (c) Calcule el menor número de años completos que tarda en desintegrarse más de la mitad de la muestra. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

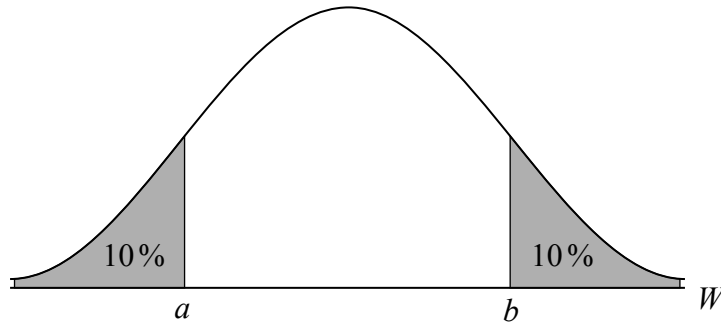


3. [Puntuación máxima: 7]

La masa, W , de los gatos de raza Manx siguen una distribución normal de media 4,5 kg y desviación típica igual a 0,4 kg.

- (a) Se escoge aleatoriamente un gato de raza Manx. Calcule la probabilidad de que la masa de este gato sea mayor que 3,5 kg. [2]

La siguiente curva representa esta distribución. Se sabe que $P(W < a) = 0,1$ y que $P(W > b) = 0,1$.



- (b) Halle el valor de:

(i) a

(ii) b [3]

- (c) Se seleccionan aleatoriamente dos gatos de raza Manx de una población numerosa. Halle la probabilidad de que los dos tengan una masa menor que 3,5 kg. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 5]

El 1 de enero de un año dado, Eva deposita 25 000 \$ en una cuenta bancaria nueva. La cuenta gana un 5% de interés simple, sobre los 25 000 \$ iniciales, al inicio de cada año siguiente.

Las cantidades que hay en la cuenta al inicio de cada año forman una progresión aritmética.

(a) Halle la diferencia común de esta progresión. [2]

Al cabo de k años completos, la cantidad que tiene Eva en la cuenta será, por primera vez, mayor que 44 000 \$.

(b) Halle el valor de k . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

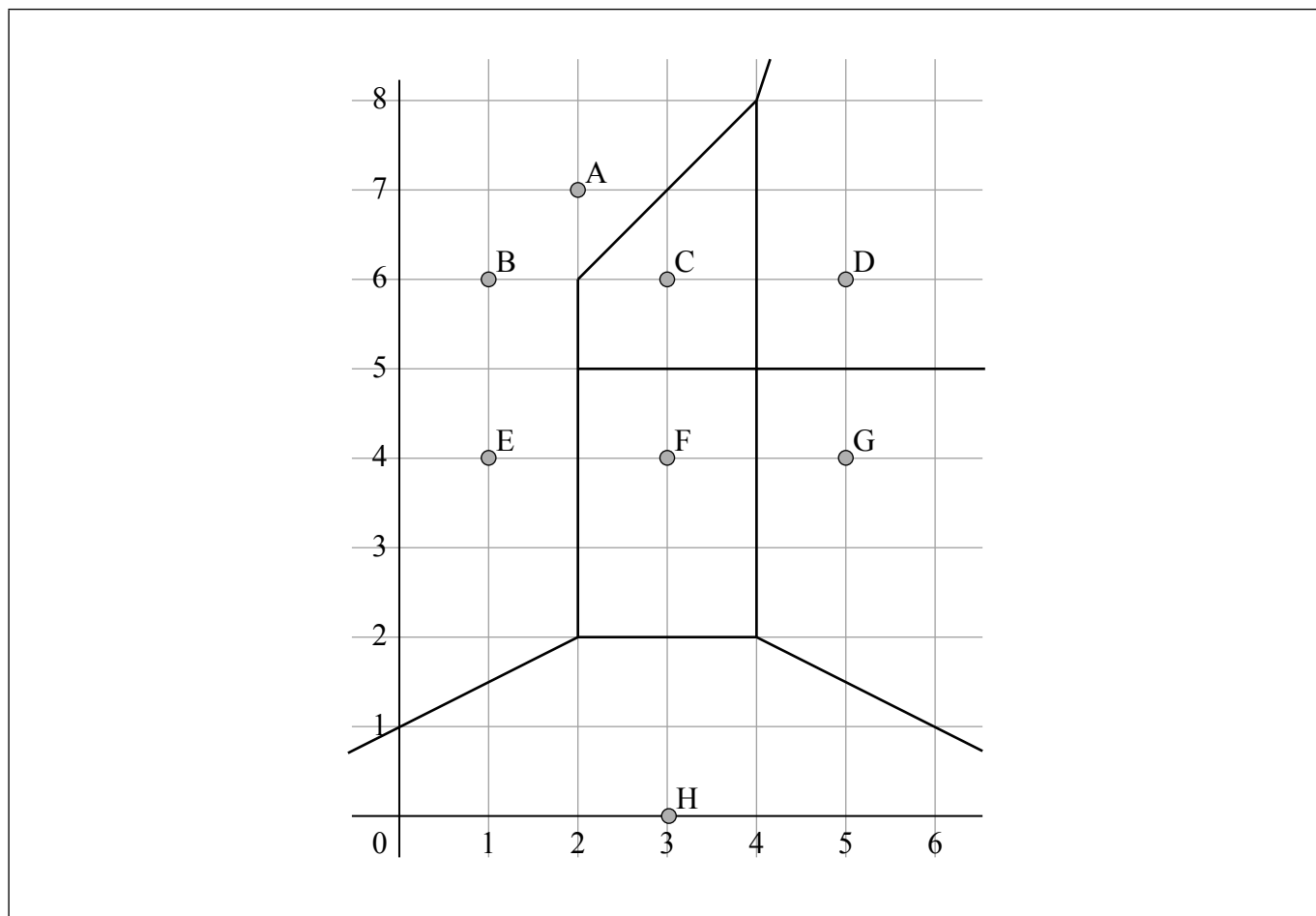
.....

.....



5. [Puntuación máxima: 6]

Los sitios en el siguiente diagrama de Voronoi representan ocho hospitales de una ciudad.



Las coordenadas de todos los sitios son números enteros. En el diagrama faltan dos aristas.

- (a) Dibuje con precisión las aristas que faltan en el diagrama. [2]

Una unidad cuadrada en este diagrama representa 4 km^2 en la ciudad.

- (b) Halle el área, en km^2 , de la celda que contiene:

(i) El sitio F

(ii) El sitio C

[3]

Los hospitales de los sitios C y F reciben el mismo número de pacientes cada año.

- (c) Sugiera una razón por la cual el número de pacientes no es proporcional al área de la celda. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 5: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP07

Véase al dorso

6. [Puntuación máxima: 4]

Un museo tiene una membresía anual que cuesta 200\$, el cual incluye 10 visitas gratuitas. El precio de cada visita adicional es de 30\$. El coste total (C) de n visitas realizadas durante un año se puede modelizar mediante

$$C(n) = \begin{cases} 200, & n < p \\ an + b, & n \geq p \end{cases}, \text{ donde } a; b; p; n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Escriba el valor de:

(i) a

(ii) p

[2]

(b) Halle el valor de b .

[2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 6]

Cuando Daniel se jubila, invierte 400 000\$ en un fondo de anualidades que paga intereses a un tipo nominal del 4,5 % anual, compuesto mensualmente.

A partir de ese momento, Daniel saca del fondo 3600\$ al final de cada mes para pagar los gastos de su día a día.

(a) Halle cuánto dinero quedará en el fondo de anualidades al cabo de 5 años. [3]

(b) Calcule cuántas veces Daniel podrá hacer estos retiros. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Puntuación máxima: 7]

La cantidad de luz diurna (L horas) que tendrá Londres en 2024 se puede modelizar mediante

$$L = a \operatorname{sen}(b(t - c)) + d,$$

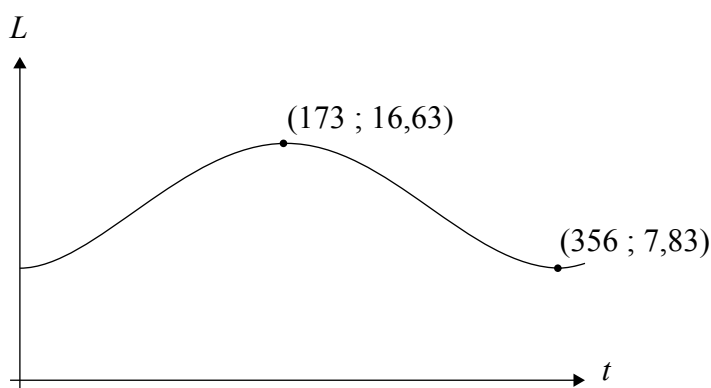
donde $a; b; c; d > 0$ y t representa el día del año.

Por ejemplo, el día 1 = 1 de enero, el día 2 = 2 de enero, y así sucesivamente.

El valor máximo de L es 16,63 horas, en el día 173 (21 de junio de 2024).

El valor mínimo de L es 7,83 horas, en el día 356 (21 de diciembre de 2024).

Esta información se muestra en la siguiente figura.



Halle el valor de:

- | | |
|---------|-----|
| (a) d | [2] |
| (b) a | [1] |
| (c) b | [2] |
| (d) c | [2] |

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 8: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP11

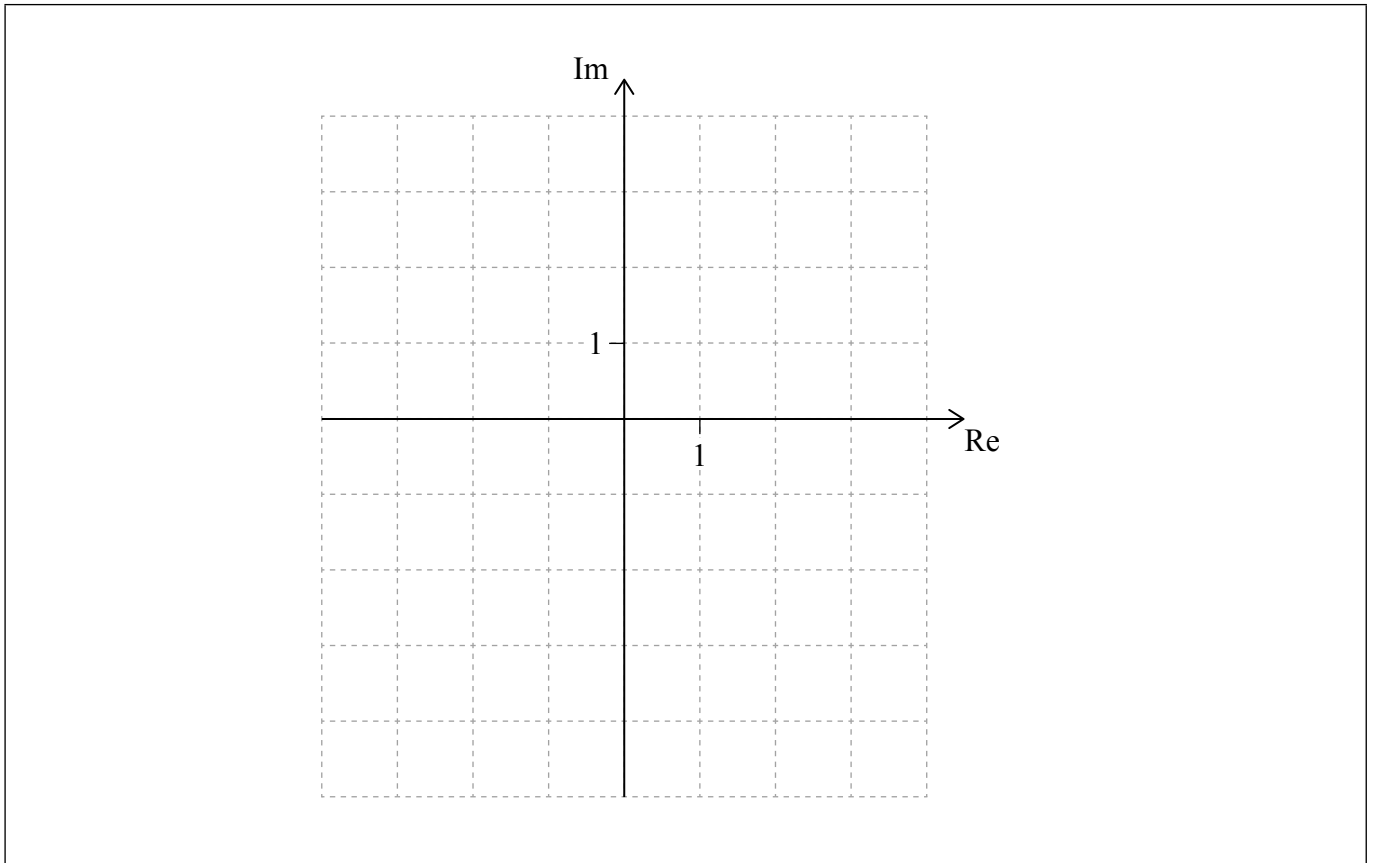
Véase al dorso

9. [Puntuación máxima: 5]

Sea $z = 2 - 3i$.

(a) Sitúe z en el diagrama de Argand.

[1]



z se puede escribir en la forma $r \operatorname{cis} \theta$, donde $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$.

(b) Halle el valor de:

(i) r

(ii) θ

[2]

(c) Halle el valor de zi en la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

[1]

zi se puede obtener a partir de z mediante una transformación geométrica.

(d) Situando zi en el diagrama de Argand, o de cualquier otro modo alternativo, describa en su totalidad esta transformación.

[1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 9: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP13

Véase al dorso

10. [Puntuación máxima: 8]

La función f se define por $f(x) = 4 \ln(2x - 3)$, donde $x > \frac{3}{2}$.

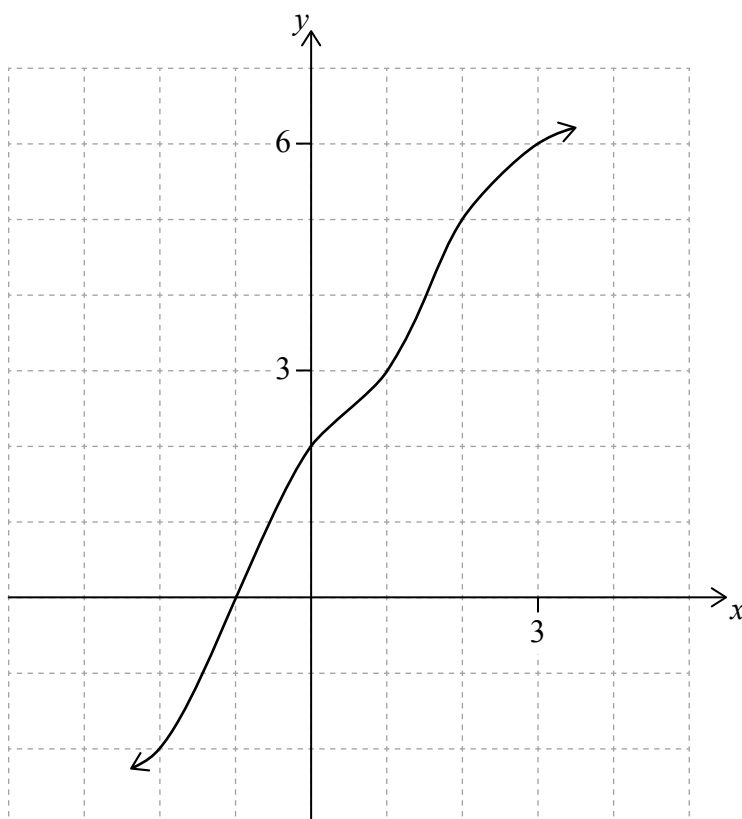
El gráfico de $y = f(x)$ se obtiene a partir del gráfico de $y = \ln x$ mediante una progresión de tres transformaciones.

- (a) Describa en su totalidad esas transformaciones, incluido el orden en el que ocurren.

[3]

A continuación se muestra el gráfico de $y = g(x)$.

Este gráfico pasa por los puntos $(-2, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ y $(3, 6)$.



- (b) Halle $(f \circ g)(2)$.

[2]

- (c) Resuelva $(f \circ g)(x) = 2 \ln 9$.

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 10: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP15

Véase al dorso

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



11. [Puntuación máxima: 8]

Sea $M = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Halle los valores propios de M .

[3]

$\mathbf{M}$ se puede escribir de la forma $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal.

(b) (i) Escriba $\mathbf{D}$.

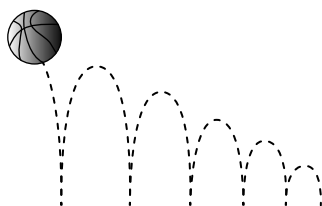
(ii) Halle P .

[5]

[illegible]

12. [Puntuación máxima: 7]

Andreas deja caer un balón y graba un vídeo de los botes que da el balón.



Utiliza el vídeo para hallar la altura máxima (en metros) que alcanza el balón después de cada uno de los cuatro primeros botes. Los resultados que obtiene se muestran en la siguiente tabla:

Número del bote (n)	Altura máxima (h)
1	0,613
2	0,514
3	0,439
4	0,377

Andreas cree que la altura máxima se puede modelizar mediante la función

$$h(n) = 0,613 \left(\frac{0,514}{0,613} \right)^{n-1}, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+.$$

(a) Complete la siguiente tabla.

[2]

Número del bote (n)	Altura máxima (h) según el modelo
1	0,613
2	0,514
3	
4	

(b) A partir de lo anterior, calcule la suma de los cuadrados de los residuos (SS_{res}).

[2]

Un amigo de Andreas cree que se podría obtener un modelo mejor para h utilizando una curva exponencial de regresión de mínimos cuadrados.

(c) (i) Halle la ecuación de este modelo.

(ii) Utilice este modelo para estimar la altura desde la cual se dejó caer inicialmente el balón.

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 12: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP19

Véase al dorso

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



13. [Puntuación máxima: 6]

En el año 2008 no había castores en Escocia; ya que se habían extinguido. En 2009 se introdujeron castores procedentes de Noruega. Se realizaron estudios en la región de Tayside para hacer un seguimiento de la población de castores.

Figura 1: Un castor



Se cree que la población (P) va aumentando conforme al modelo logístico

$$P = \frac{L}{1 + Ce^{-0,28t}},$$

donde t es el número de años que han transcurrido desde 2008, $t \geq 1$.

El estudio que se realizó en 2017 estimó que la población era de 433.

El estudio que se realizó en 2020 estimó que la población era de 954.

Halle la capacidad de carga (L) correspondiente al número de castores que hay en Tayside, según este modelo.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



14. [Puntuación máxima: 8]

Sabine está jugando en la playa y decide construir un montículo de arena. La forma de la sección transversal de este montículo que pasa por su centro se puede modelizar mediante la función

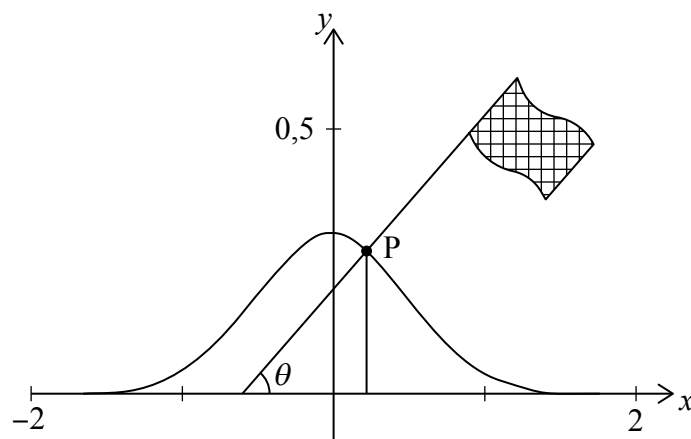
$$f(x) = 0,3e^{-2x^2},$$

donde $-2 < x < 2$.

Sabine introduce un mástil de bandera en este montículo, concretamente en el punto (P) que está a 0,25 m sobre el nivel de la playa. El mástil es perpendicular al montículo de arena en el punto P.

Esta información se muestra en la figura, donde el eje x representa el nivel de la playa y el eje y representa la altura sobre el nivel de la playa. La escala utilizada en los ejes es: 1 unidad = 1 metro.

la figura no está dibujada a escala



Las coordenadas de P son $(a ; 0,25)$, donde $a > 0$.

- (a) Calcule el valor de a . [2]
- (b) Halle una expresión para $f'(x)$. [2]
- (c) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, halle el ángulo θ que forma el mástil con el nivel de la playa. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 14: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



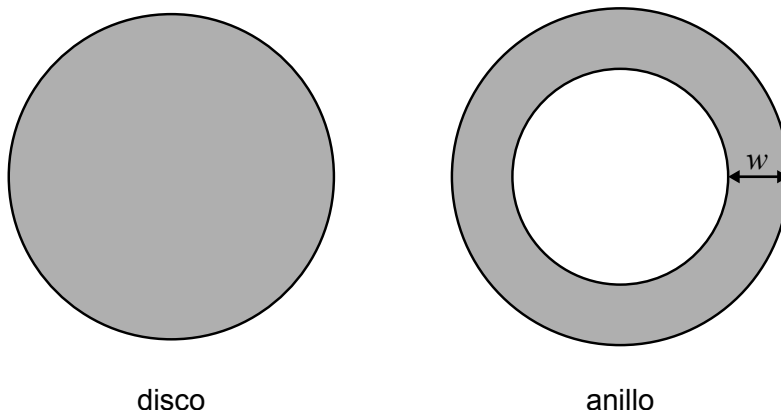
32EP23

Véase al dorso

15. [Puntuación máxima: 8]

Un anillo de metal, de ancho (w) se fabrica recortando primero un disco circular y luego un agujero circular exactamente en el centro de este disco. Esto se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



Hay una máquina que fabrica cada día muchos anillos de este tipo.

Los diámetros de los discos siguen una distribución normal de media 30 cm y una desviación típica igual a 0,8 cm.

(a) Halle la distribución de los radios de esos discos.

[3]

Los radios de los **agujeros** siguen una distribución normal de media 12 cm y una desviación típica igual a 0,25 cm.

(b) Calcule la probabilidad de que el ancho de un anillo elegido aleatoriamente sea menor que 2,5 cm.

[5]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 15: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP25

Véase al dorso

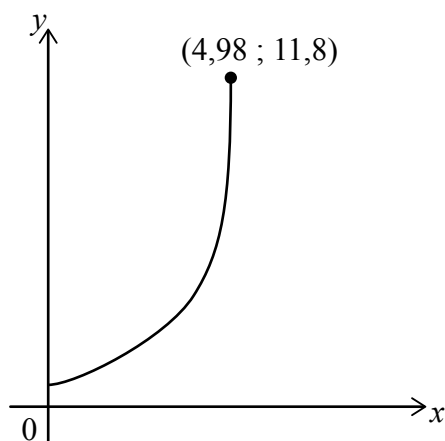
16. [Puntuación máxima: 7]

Como parte de su exploración matemática, Jules modeliza la forma de una parte de una copa de vino para hallar la capacidad (es decir, el volumen) de la copa.

Averigua que el borde de la mitad de la copa se puede modelizar mediante la función

$$f(x) = 4 - 2\ln(5 - x), \text{ donde } 0 \leq x \leq 4,98.$$

A continuación se muestra el gráfico de $y = f(x)$ utilizando como escala 1 unidad = 1 cm.



(a) Halle la intersección con el eje y .

[1]

El punto $(4,98 ; 11,8)$ representa un punto del borde superior de la copa.

Sea R la región delimitada por el gráfico de f , el eje y y la recta $y = 11,8$.

Para hallar la capacidad, Jules rota la región R , 360° alrededor del eje y .

(b) Calcule la capacidad de la copa que Jules obtiene.

[6]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 16: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



32EP27

Véase al dorso

17. [Puntuación máxima: 7]

Los peces de un lago se alimentan de insectos. Sea F la población de peces y L la población de insectos en el instante t (semanas).

Estas poblaciones se pueden modelizar mediante las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= 0,000004FL - 0,2F \\ \frac{dL}{dt} &= 0,06L - 0,00003FL\end{aligned}$$

donde $F > 0$ y $L > 0$.

Cuando $t = 0$, se estima que $F = 5000$ y $L = 80000$.

(a) Para $0 \leq t \leq 52$, utilice el método de Euler, con un paso $h = 4$, para hallar un valor aproximado para:

(i) El máximo valor de F

(ii) El mínimo valor de L

[5]

(b) (i) Indique qué le sucederá al número de peces que hay en el lago, según lo que predice el modelo.

(ii) Sugiera una razón por la cual es posible que esta predicción no ocurra.

[2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 17: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Advertencia:

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

Referencias:

Figura 1 animatedfunk, s.f. Beaver Illustrations – stock illustration [imagen en línea] Disponible en: <https://www.gettyimages.co.uk/detail/illustration/beaver-illustrations-royalty-free-illustration/1453231718> [Consulta: 30 de noviembre de 2023]. Material original adaptado.

Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2024



32EP30

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



32EP31

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



32EP32