

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

## Nivel Superior

### Prueba 2

25 de octubre de 2024

Zona A mañana | Zona B mañana | Zona C mañana

2 horas

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

En una encuesta participaron 20 000 expatriados (personas que viven en un país distinto del suyo). Los datos clasificaban a los países por orden según el país que consideraban mejor para los expatriados. En la posición más alta del ranking estaba Suiza.

Estos resultados se compararon con las puntuaciones de felicidad procedentes *Informe mundial sobre felicidad 2022*. La siguiente tabla muestra este dato para los 10 mejores países para los expatriados.

| País                                      | Suiza | Nueva Zelanda | España | Australia | Chipre | Portugal | Irlanda | Emiratos Árabes Unidos | Francia | Países Bajos |
|---|-------|---------------|--------|-----------|--------|----------|---------|------------------------|---------|--------------|
| <b>Ranking de países para expatriados</b> | 1     | 2             | 3      | 4         | 5      | 6        | 7       | 8                      | 9       | 10           |
| <b>Puntuación de felicidad</b>            | 7,5   | 7,2           | 6,5    | 7,2       | 6,2    | 6,0      | 7,0     | 6,6                    | 6,7     | 7,4          |

(a) Para la **puntuación de felicidad**, halle:

(i) El tercer cuartil

(ii) El rango intercuartil

[4]

(b) Muestre que la puntuación de felicidad de Suiza no es un valor atípico en estos datos.

[3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Se elaboró un ranking con las puntuaciones de felicidad para poder calcular el coeficiente de correlación por rangos de Spearman ( $r_s$ ). Estos rangos se muestran en la siguiente tabla.

| País                    | Suiza | Nueva Zelanda | España | Australia | Chipre | Portugal | Irlanda | Emiratos Árabes Unidos | Francia | Países Bajos |
|-------------------------|-------|---------------|--------|-----------|--------|----------|---------|------------------------|---------|--------------|
| Puntuación de felicidad | 7,5   | 7,2           | 6,5    | 7,2       | 6,2    | 6,0      | 7,0     | 6,6                    | 6,7     | 7,4          |
| Rango de felicidad      | 1     | $a$           | $b$    | $c$       | 9      | 10       | 5       | 7                      | 6       | 2            |

(c) Escriba el valor de:

(i)  $a$

(ii)  $b$

(iii)  $c$

[3]

(d) (i) Halle  $r_s$ .

(ii) Si la puntuación de felicidad de Francia aumenta hasta 6,9, explique por qué no cambia el valor de  $r_s$ .

[3]

José, a partir de estos datos, concluye que los países con una puntuación de felicidad alto probablemente sean los países preferidos por los expatriados.

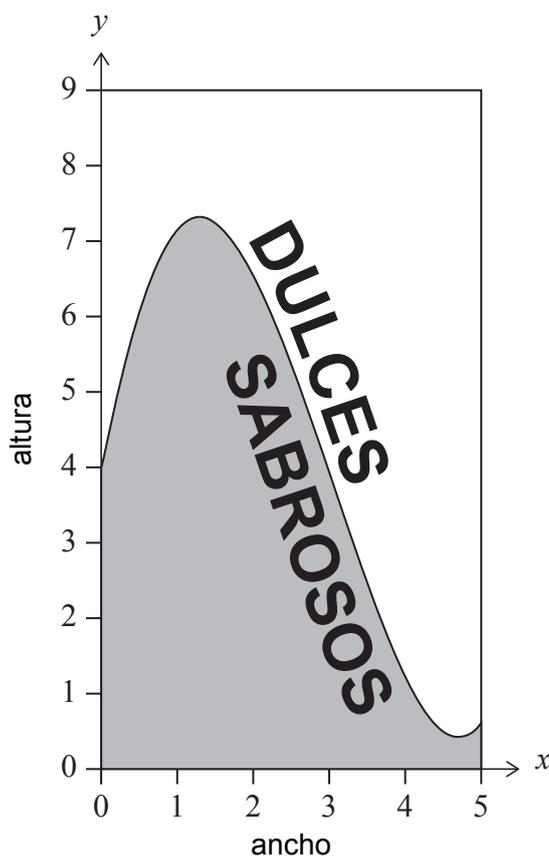
(e) Indique, dando una razón, si la conclusión de José resulta (o no) apropiada.

[1]

2. [Puntuación máxima: 18]

Unos dulces se venden en envases cilíndricos. Se considera diseñar una nueva etiqueta para el envase. La etiqueta tendrá forma de rectángulo de 5 cm de ancho y 9 cm de alto.

El diseño que aparece en la etiqueta es una curva, como se muestra en los siguientes ejes de coordenadas, donde una unidad representa 1 cm en ambos ejes.



Los valores de la tabla representan puntos aproximados de la curva, redondeando a un lugar decimal.

|               |   |     |     |     |     |     |
|---------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ancho ( $x$ ) | 0 | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| Alto ( $y$ )  | 4 | 7,3 | 6,7 | 4,0 | 1,3 | 0,7 |

- (a) Utilice la regla del trapecio con cinco intervalos, y los valores dados en la tabla, para estimar el área sombreada bajo la curva. [3]

La curva empleada en el diseño de la etiqueta se puede modelizar mediante:

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 6x + 4, \text{ para } 0 \leq x \leq 5.$$

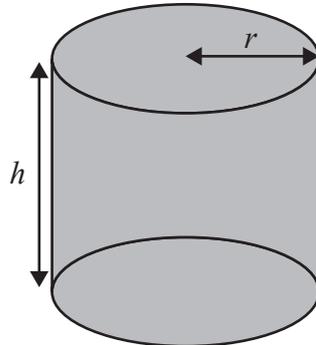
- (b) (i) A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Los dulces se venden en envases cilíndricos cerrados de radio  $r$  y altura  $h$ .

**la figura no está dibujada a escala**



Todo el envase está hecho de un único tipo de material y se supone que el espesor del material es despreciable.

Cada envase tiene un volumen de  $600\text{ cm}^3$ .

(c) Escriba una ecuación, en función de  $r$  y  $h$ , que muestre esta información. [1]

La cantidad de material utilizada para cada envase se puede modelizar mediante el área de la superficie externa del envase.

El área de la superficie externa ( $A$ ) del envase se puede expresar así

$$A = 2\pi r^2 + \frac{k}{r}, \text{ donde } r > 0.$$

(d) Halle el valor de  $k$ . [4]

(e) (i) Halle  $\frac{dA}{dr}$ .

(ii) Sabiendo que existe un valor mínimo de  $A$ , halle el valor de  $r$  que minimizará el material utilizado. [5]

Los envases se fabrican de modo tal que se minimiza el área de la superficie. La etiqueta rectangular de  $5\text{ cm}$  por  $9\text{ cm}$  se quiere pegar en la superficie curva del envase.

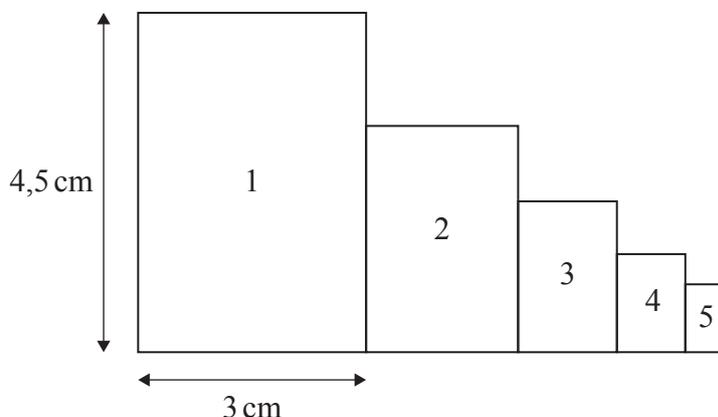
(f) Muestre que la etiqueta encajará en el envase. [3]

Página en blanco

3. [Puntuación máxima: 15]

Ayaka está creando un diseño compuesto por una progresión de rectángulos. La figura muestra una parte de su diseño, utilizando 5 rectángulos.

la figura no está dibujada a escala



El primer rectángulo tiene las siguientes dimensiones: 4,5 cm de altura y 3 cm de ancho.

Las dimensiones de cada rectángulo posterior son  $\frac{2}{3}$  de las dimensiones del rectángulo anterior.

- (a) Calcule el ancho del 5.º rectángulo. [2]
- (b) Calcule el ancho total del diseño que está compuesto por 5 rectángulos. [2]

Ayaka sigue añadiendo rectángulos a su diseño.

- (c) Halle el valor más pequeño del ancho total que su diseño no puede superar. [3]

El ancho del diseño final de Ayaka tiene que ser al menos 8,5 cm y ha de utilizar el menor número de rectángulos.

- (d) Halle el número total de rectángulos que hay en su diseño final. [3]

Las **áreas** decrecientes de los rectángulos forman una progresión geométrica.

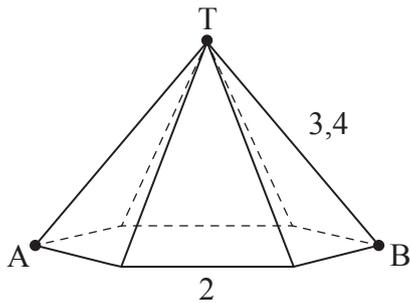
- (e) Halle la razón común de esta progresión de áreas. [2]
- (f) Halle el área total del diseño final de Ayaka. [3]

4. [Puntuación máxima: 17]

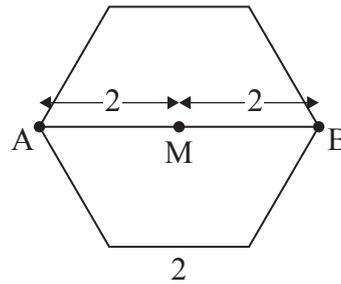
Gaurika está diseñando una tienda de campaña con forma de pirámide recta de base hexagonal regular y centro en  $M$ . Cada lado de la base mide 2 m de largo, cada arista inclinada mide 3,4 m de largo y la distancia entre cada vértice de la base y  $M$  es igual a 2 m, como se muestra en las figuras.

la figura no está dibujada a escala

Vista 3D de la tienda de campaña



Vista 2D de la base

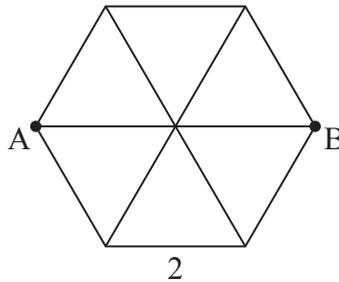


La parte superior de la tienda de campaña (el punto  $T$ ) se va a sostener mediante un mástil vertical en  $M$ .

- (a) Halle la longitud de este mástil ( $MT$ ). [2]

La base hexagonal se puede dividir en seis triángulos equiláteros.

la figura no está dibujada a escala



- (b) Halle:
- (i) El área de la base;
  - (ii) El volumen de la tienda de campaña. [5]
- (c) Halle el valor de  $\widehat{MAT}$ . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 4: continuación)**

Para darle una sujeción adicional, Gaurika decide atar una cuerda de 2,6 m de largo a la tienda de campaña en el punto X, situado en la arista AT.

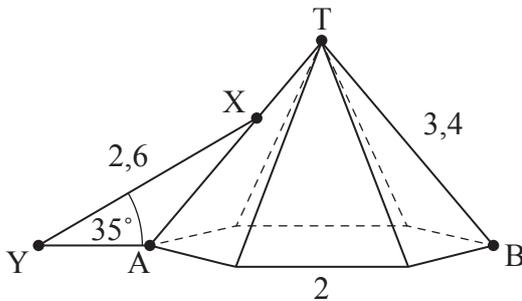
La cuerda se fijará al suelo en el punto Y, tal que:

- La cuerda [XY] es recta.
- Los puntos Y, A y B están en línea recta.
- $\widehat{AYX} = 35^\circ$ .

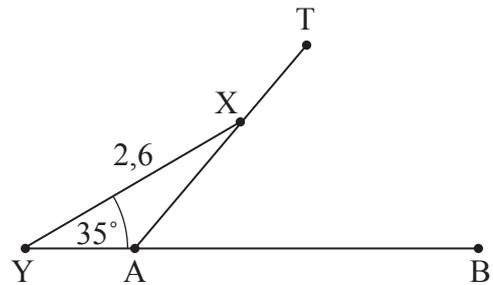
Esto se muestra en las siguientes figuras.

**la figura no está dibujada a escala**

Vista 3D de la tienda de campaña y de la cuerda



Vista 2D del triángulo AXY



(d) Halle AY. [4]

A modo de decoración nocturna, Gaurika quiere fijar una tira de luces que vaya del punto A al punto Z, a lo largo de la cuerda [XY].

La tira de luces [AZ] es recta y mide 0,9 m de largo.

(e) Halle los dos valores posibles de YZ. [4]

5. [Puntuación máxima: 15]

En esta pregunta, todas las distancias están en kilómetros y  $t$  está en horas.

Sea  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  un desplazamiento de 1 km hacia el este,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  un desplazamiento de 1 km hacia el norte, y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  un desplazamiento vertical de 1 km.

La Autopista 85 de Arabia Saudita es una carretera larga, recta y plana.

Respecto al centro de la ciudad de Arar (punto O), el vector de posición de un automóvil (C) que recorre esta carretera viene dado por:

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 50 \\ -33 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Halle la rapidez del automóvil.

[2]

La policía está poniendo a prueba un dron de largo alcance (D) para vigilar los automóviles que circulan por esta carretera. El dron se lanza en el instante  $t = 0$  desde el punto cuyo

vector de posición es  $\begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0,02 \end{pmatrix}$  y vuela en línea recta a una altura constante de 0,02 km y a

una velocidad constante de  $\begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(b) Halle el ángulo que se forma entre la trayectoria del automóvil y la trayectoria del dron.

[3]

(c) Escriba el vector de posición ( $\vec{OD}$ ) del dron en el instante  $t$ .

[1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 5: continuación)**

(d) En el instante  $t_1$ , el dron pasa por el punto cuyo vector de posición es  $\begin{pmatrix} 152 \\ p \\ 0,02 \end{pmatrix}$ .  
Halle el valor de:

(i)  $t_1$

(ii)  $p$

[3]

(e) (i) Halle una expresión para  $\vec{CD}$ , que es la posición relativa del dron respecto al automóvil.

(ii) A partir de lo anterior, halle la distancia mínima que habrá entre el automóvil y el dron.

[6]

Página en blanco

6. [Puntuación máxima: 13]

Juan está creando animaciones para un sitio web. Utiliza matrices para transformar objetos con respecto al origen,  $O$ .

Una de las matrices que utiliza es  $A = \begin{pmatrix} \cos(15^\circ) & -\text{sen}(15^\circ) \\ \text{sen}(15^\circ) & \cos(15^\circ) \end{pmatrix}$ .

(a) Describa en su totalidad la transformación que representa la matriz  $A$ . [1]

(b) Halle el valor más pequeño de  $n$  para el cual se cumple que  $A^n = I$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . [2]

Juan también utiliza la matriz  $B$ , que representa una homotecia de razón 1,05 y con centro en  $(0, 0)$ .

(c) (i) Escriba la matriz  $B$ .

(ii) Describa en su totalidad la transformación que representa  $B^n$ , donde  $n$  es el valor que halló en el apartado (b). [3]

Juan crea una nueva matriz  $C = AB$ .

(d) Halle la matriz  $C$ . [2]

Juan crea una animación transformando un objeto repetidamente mediante  $C$ .

Un punto ( $P$ ) del objeto se encuentra inicialmente en  $(1, 0)$ . Juan establece que la velocidad de la animación sea de 6 transformaciones por segundo.

(e) Dibuje aproximadamente la trayectoria de  $P$  durante los 4 primeros segundos de movimiento  $y$  rotule las coordenadas del punto inicial y del punto final. [2]

Juan utiliza una transformación distinta  $T$ , que se define así

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para crear la animación, Juan transforma un objeto repetidamente mediante  $T$ . Después de muchas transformaciones, se da cuenta de que todos los puntos  $(x, y)$  en el objeto tienden hacia un único punto  $(p, q)$ , tal que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} T^a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \text{ donde } a \in \mathbb{Z}^+.$$

(f) Halle  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , donde  $p, q \in \mathbb{R}$ . [3]

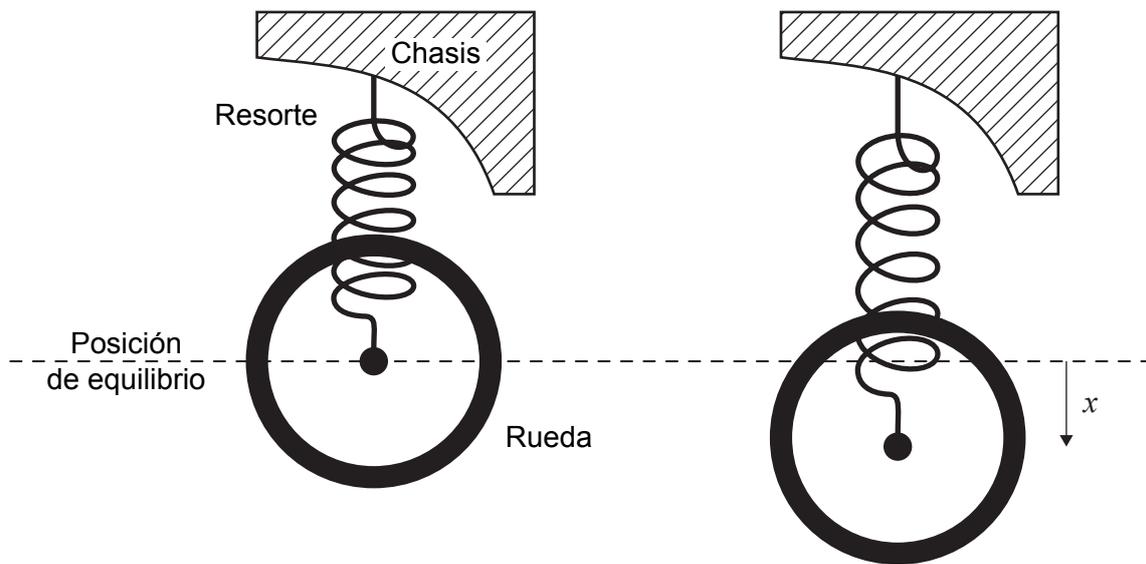
7. [Puntuación máxima: 18]

La rueda de una motocicleta está unida al chasis mediante un resorte. El movimiento del resorte actúa de **amortiguador**. Cuando el motorista se sienta en la motocicleta el resorte se comprime; esta posición se denomina “posición de equilibrio”.

Cuando la rueda se mete en un hueco o pasa por encima de un bache de la carretera, el resorte se estira o se comprime para garantizar una conducción suave.

Sea  $x$  el desplazamiento vertical, en centímetros, del centro de la rueda por debajo de la posición de equilibrio, como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



El desplazamiento vertical del centro de la rueda, en el instante  $t$  segundos, se puede modelizar mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Sea  $y = \frac{dx}{dt}$ .

(a) Muestre que  $\frac{dy}{dt} = -bx - ay$ .

[2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

**(Pregunta 7: continuación)**

Las ecuaciones  $y = \frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt} = -bx - ay$  se pueden escribir en forma matricial así

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ donde } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Un fabricante quiere comparar dos resortes —el Resorte 1 y el Resorte 2— que se podrían utilizar como amortiguadores.

En la ecuación diferencial correspondiente al Resorte 1,  $a = 18$  y  $b = 77$ .

Para estos valores, los valores propios de  $\mathbf{M}$  son  $-7$  y  $-11$ .

(b) Halle los correspondientes vectores propios. [3]

El fabricante modeliza **ambos** resortes utilizando las mismas condiciones iniciales:

$$t = 0, x = 5 \text{ cm y } \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cms}^{-1}.$$

(c) A partir de lo anterior, para el Resorte 1:

- (i) Halle la solución exacta para  $x(t)$ .
- (ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $x(t)$ , para  $0 \leq t \leq 1$ . [7]

En la ecuación diferencial correspondiente al Resorte 2,  $a = 18$  y  $b = 85$ .

Para estos valores, los valores propios de  $\mathbf{M}$  son  $-9 \pm 2i$ .

- (d) (i) Dibuje aproximadamente el retrato de fase correspondiente al Resorte 2, indicando la dirección de la trayectoria.
- (ii) A partir de lo anterior, dibuje aproximadamente el gráfico de  $x$  en función de  $t$ . [5]
- (e) Utilizando las respuestas que dió en los apartados (c)(ii) y (d)(ii), dé una razón por la cual el Resorte 1 podría ser un mejor amortiguador que el Resorte 2. [1]

**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

**Referencias:**

1. InterNations. 2022. *Expat Insider 2022*. [en línea] Disponible en: <https://www.internations.org/expat-insider/2022/>. Material original adaptado.  
Heliwell, J. F., Huang, H., Wang, S. y Norton, M., 2022. Statistical Appendix for “Happiness, benevolence, and trust during COVID-19 and beyond,” Capítulo 2 del *World Happiness Report 2022*. [pdf en línea] Disponible en: <https://worldhappiness.report/ed/2022/happiness-benevolence-and-trust-during-covid-19-and-beyond/> [Consulta: 13 de noviembre de 2023]. Material original adaptado.

**Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2024**