



International Baccalaureate®  
Baccalauréat International  
Bachillerato Internacional

Programa del Diploma

# Guía de Matemáticas NS

Primeros exámenes: 2014





International Baccalaureate®  
Baccalauréat International  
Bachillerato Internacional

Programa del Diploma

---

# Guía de Matemáticas NS

Primeros exámenes: 2014



## **Programa del Diploma Guía de Matemáticas NS**

Versión en español del documento publicado en junio de 2012 con el título  
*Mathematics HL guide*

Publicada en junio de 2012  
Actualizada en agosto de 2014  
Actualizada en mayo de 2016  
Actualizada en noviembre de 2016

Bachillerato Internacional  
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate  
Cardiff, Wales GB CF23 8GL  
Reino Unido  
Tel.: +44 29 2054 7777  
Fax: +44 29 2054 7778  
Sitio web: <http://www.ibo.org>

© Organización del Bachillerato Internacional, 2012

El Bachillerato Internacional (IB) ofrece tres programas educativos exigentes y de calidad a una comunidad de colegios de todo el mundo, con el propósito de crear un mundo mejor y más pacífico.

El IB agradece la autorización para reproducir en esta publicación material protegido por derechos de autor. Cuando procede, se han citado las fuentes originales y, de serle notificado, el IB enmendará cualquier error u omisión con la mayor brevedad posible.

El uso del género masculino en esta publicación no tiene un propósito discriminatorio y se justifica únicamente como medio para hacer el texto más fluido. Se pretende que el español utilizado sea comprensible para todos los hablantes de esta lengua y no refleje una variante particular o regional de la misma.

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede reproducirse, almacenarse o distribuirse de forma total o parcial, en manera alguna ni por ningún medio, sin la previa autorización por escrito del IB, sin perjuicio de lo estipulado expresamente por la ley o por la política y normativa de uso de la propiedad intelectual del IB. Véase la página <http://www.ibo.org/es/copyright> del sitio web del IB para más información.

Los artículos promocionales y las publicaciones del IB pueden adquirirse en la tienda virtual del IB, disponible en <http://store.ibo.org>. Las consultas sobre pedidos deben dirigirse al departamento de marketing y ventas en Cardiff.

Tel.: +44 29 2054 7746  
Fax: +44 29 2054 7779  
Correo-e: [sales@ibo.org](mailto:sales@ibo.org)

**International Baccalaureate, Baccalauréat International y Bachillerato Internacional**  
son marcas registradas de la Organización del Bachillerato Internacional.

# Declaración de principios del IB

El Bachillerato Internacional (IB) tiene como meta formar jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento, capaces de contribuir a crear un mundo mejor y más pacífico, en el marco del entendimiento mutuo y el respeto intercultural.

En pos de este objetivo, la organización colabora con establecimientos escolares, gobiernos y organizaciones internacionales para crear y desarrollar programas de educación internacional exigentes y métodos de evaluación rigurosos.

Estos programas alientan a estudiantes del mundo entero a adoptar una actitud activa de aprendizaje durante toda su vida, a ser compasivos y a entender que otras personas, con sus diferencias, también pueden estar en lo cierto.

## Perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El objetivo fundamental de los programas del IB es formar personas con mentalidad internacional que, conscientes de la condición que los une como seres humanos y de la responsabilidad que comparten de velar por el planeta, contribuyan a crear un mundo mejor y más pacífico.

Los miembros de la comunidad de aprendizaje del IB se esfuerzan por ser:

<b>Indagadores</b>	Desarrollan su curiosidad natural. Adquieren las habilidades necesarias para indagar y realizar investigaciones, y demuestran autonomía en su aprendizaje. Disfrutan aprendiendo y mantendrán estas ansias de aprender durante el resto de su vida.
<b>Informados e instruidos</b>	Exploran conceptos, ideas y cuestiones de importancia local y mundial y, al hacerlo, adquieren conocimientos y profundizan su comprensión de una amplia y equilibrada gama de disciplinas.
<b>Pensadores</b>	Aplican, por propia iniciativa, sus habilidades intelectuales de manera crítica y creativa para reconocer y abordar problemas complejos, y para tomar decisiones razonadas y éticas.
<b>Buenos comunicadores</b>	Comprenden y expresan ideas e información con confianza y creatividad en diversas lenguas, lenguajes y formas de comunicación. Están bien dispuestos a colaborar con otros y lo hacen de forma eficaz.
<b>Íntegros</b>	Actúan con integridad y honradez, poseen un profundo sentido de la equidad, la justicia y el respeto por la dignidad de las personas, los grupos y las comunidades. Asumen la responsabilidad de sus propios actos y las consecuencias derivadas de ellos.
<b>De mentalidad abierta</b>	Entienden y aprecian su propia cultura e historia personal, y están abiertos a las perspectivas, valores y tradiciones de otras personas y comunidades. Están habituados a buscar y considerar distintos puntos de vista y dispuestos a aprender de la experiencia.
<b>Solidarios</b>	Muestran empatía, sensibilidad y respeto por las necesidades y sentimientos de los demás. Se comprometen personalmente a ayudar a los demás y actúan con el propósito de influir positivamente en la vida de las personas y el medio ambiente.
<b>Audaces</b>	Abordan situaciones desconocidas e inciertas con sensatez y determinación y su espíritu independiente les permite explorar nuevos roles, ideas y estrategias. Defienden aquello en lo que creen con elocuencia y valor.
<b>Equilibrados</b>	Entienden la importancia del equilibrio físico, mental y emocional para lograr el bienestar personal propio y el de los demás.
<b>Reflexivos</b>	Evalúan detenidamente su propio aprendizaje y experiencias. Son capaces de reconocer y comprender sus cualidades y limitaciones para, de este modo, contribuir a su aprendizaje y desarrollo personal.



# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Propósito de esta publicación	1
El Programa del Diploma	2
Naturaleza de la asignatura	4
Objetivos generales	9
Objetivos de evaluación	10
<b>Programa de estudios</b>	<b>11</b>
Resumen del programa de estudios	11
Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje del curso	12
Temas relacionados con los conocimientos previos	16
Contenido del programa de estudios	18
Glosario de terminología: matemática discreta	55
<b>Evaluación</b>	<b>57</b>
La evaluación en el Programa del Diploma	57
Resumen de la evaluación	59
Evaluación externa	60
Evaluación interna	64
<b>Apéndices</b>	<b>72</b>
Glosario de términos de instrucción	72
Notación	74



## Propósito de esta publicación

El propósito de esta publicación es servir de guía a los colegios en la planificación, la enseñanza y la evaluación de la asignatura. Si bien está dirigida principalmente a los profesores, se espera que estos la utilicen para informar sobre la asignatura a padres y alumnos.

Esta guía está disponible en la página de la asignatura en el Centro pedagógico en línea (<http://occ.ibo.org>), un sitio web del IB protegido por contraseña concebido para proporcionar apoyo a los profesores del IB. También puede adquirirse en la tienda virtual del IB (<http://store.ibo.org>).

## Otros recursos

En el Centro pedagógico en línea (CPEL) pueden encontrarse también publicaciones tales como materiales de ayuda al profesor, informes de la asignatura, información adicional sobre la evaluación interna y descriptores de las calificaciones finales. En la tienda virtual del IB se pueden adquirir exámenes de muestra, exámenes de convocatorias pasadas y esquemas de calificación.

Se anima a los profesores a que visiten el CPEL para ver materiales adicionales creados o utilizados por otros docentes. Se les invita también a aportar información sobre materiales que consideren útiles, por ejemplo: sitios web, libros, videos, publicaciones periódicas o ideas pedagógicas.

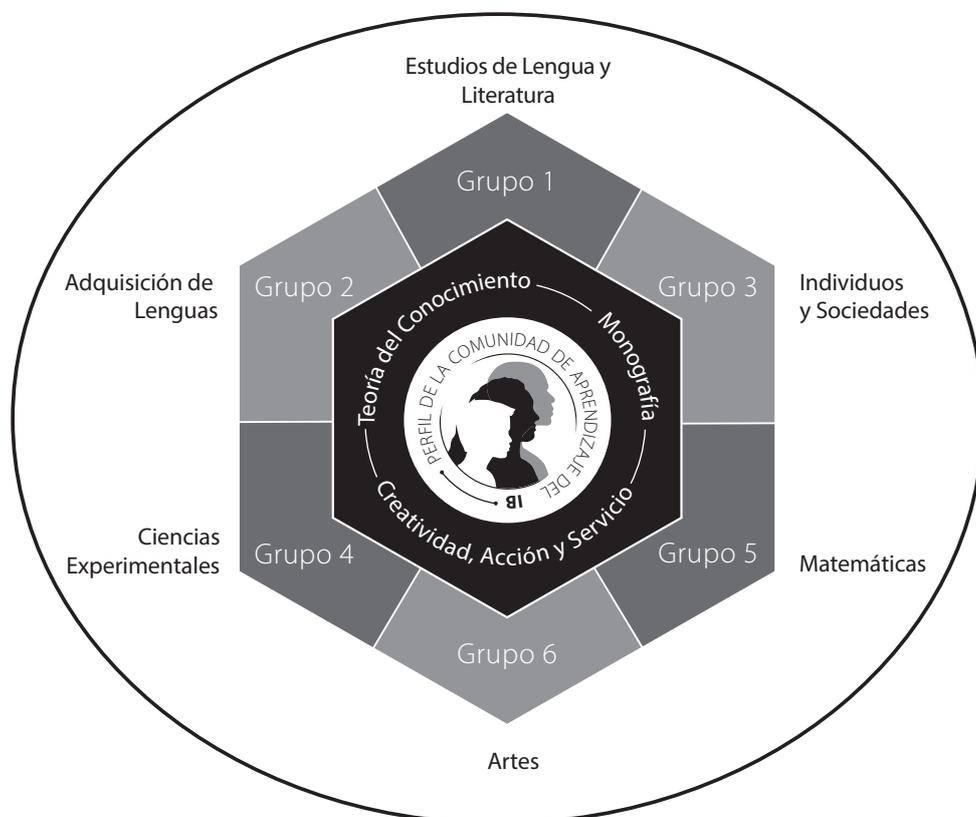
**Primeros exámenes: 2014**

# El Programa del Diploma

El Programa del Diploma es un curso preuniversitario exigente de dos años de duración, para jóvenes de 16 a 19 años. Su currículo abarca una amplia gama de áreas de estudio y aspira a formar alumnos informados y con espíritu indagador, a la vez que solidarios y sensibles a las necesidades de los demás. Se da especial importancia a que los jóvenes desarrollen el entendimiento intercultural y una mentalidad abierta, así como las actitudes necesarias para respetar y evaluar distintos puntos de vista.

## El hexágono del Programa del Diploma

El currículo del programa se representa mediante un hexágono dividido en seis áreas académicas dispuestas en torno a un núcleo (véase la figura 1), y fomenta el estudio de una variedad de áreas académicas durante los dos años. Los alumnos estudian dos lenguas modernas (o una lengua moderna y una clásica), una asignatura de humanidades o ciencias sociales, una ciencia experimental, una asignatura de matemáticas y una de las artes. Esta variedad hace del Programa del Diploma un curso exigente y muy eficaz como preparación para el ingreso a la universidad. Además, en cada una de las áreas académicas los alumnos tienen flexibilidad para elegir las asignaturas en las que estén particularmente interesados y que quizás deseen continuar estudiando en la universidad.



**Figura 1**  
*Modelo del Programa del Diploma*

## La combinación adecuada

Los alumnos deben elegir una asignatura de cada una de las seis áreas académicas, aunque también tienen la opción de elegir una segunda asignatura de los grupos del 1 al 5 en lugar de una asignatura del Grupo 6. Generalmente tres asignaturas (y no más de cuatro) deben cursarse en el Nivel Superior (NS) y las demás en el Nivel Medio (NM). El IB recomienda dedicar 240 horas lectivas a las asignaturas del NS y 150 a las del NM. Las asignaturas del NS se estudian con mayor amplitud y profundidad que las del NM.

En ambos niveles se desarrollan numerosas habilidades, en especial las de análisis y pensamiento crítico. Dichas habilidades se evalúan externamente al final del curso. En muchas asignaturas los alumnos realizan también trabajos que califica directamente el profesor en el colegio. Los exámenes pueden realizarse en español, francés e inglés, a excepción de los grupos 1 y 2: los exámenes de estos dos grupos se hacen en la lengua objeto de estudio.

## El núcleo del hexágono

Todos los alumnos del Programa del Diploma deben completar los tres requisitos que conforman el núcleo del hexágono. La reflexión inherente a las actividades que los alumnos desarrollan en estas áreas es un principio fundamental de la filosofía del Programa del Diploma.

El curso de Teoría del Conocimiento anima a los alumnos a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento y el proceso de aprendizaje que tiene lugar en las asignaturas que estudian como parte del Programa del Diploma, y a establecer conexiones entre las áreas académicas. La Monografía, un trabajo escrito de unas 4.000 palabras, ofrece a los alumnos la oportunidad de investigar un tema de su elección que les interese especialmente. Asimismo, los estimula a desarrollar las habilidades necesarias para llevar a cabo una investigación independiente, habilidades que deberán poner en práctica en la universidad. Creatividad, Acción y Servicio posibilita el aprendizaje experiencial mediante la participación de los alumnos en una variedad de actividades artísticas, deportivas, físicas y de servicio a la comunidad.

## La declaración de principios del IB y el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El Programa del Diploma se propone desarrollar en los alumnos los conocimientos, las habilidades y las actitudes que necesitarán para alcanzar las metas del IB, tal como aparecen expresadas en su declaración de principios y en el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB. La enseñanza y el aprendizaje en el Programa del Diploma representan la puesta en práctica de la filosofía educativa del IB.

# Naturaleza de la asignatura

## Introducción

La naturaleza de las matemáticas se puede resumir de varias maneras, por ejemplo, como un conjunto de conocimientos bien definido, un sistema abstracto de ideas o una herramienta útil. Es probable que para muchas personas sea una combinación de estas tres cosas, pero no hay duda de que el conocimiento matemático proporciona una clave importante para la comprensión del mundo en que vivimos. Las matemáticas pueden aparecer en nuestra vida de diversas formas: al comprar productos en el mercado, consultar un horario, leer un periódico, cronometrar un proceso o estimar una longitud. Para muchos de nosotros, las matemáticas también forman parte de nuestra profesión: los pintores han de aprender perspectiva, los músicos deben comprender las relaciones matemáticas dentro de un mismo ritmo y entre ritmos distintos, los economistas tienen que reconocer tendencias en las transacciones financieras y los ingenieros deben tener en cuenta los tipos de tensión de los materiales. Los científicos consideran las matemáticas como un lenguaje fundamental para la comprensión de lo que ocurre en la naturaleza. Algunas personas disfrutan de los desafíos que plantean los métodos lógicos de las matemáticas y de la aventura del razonamiento que suponen las demostraciones. Para otras, las matemáticas constituyen una experiencia estética o incluso uno de los pilares de la filosofía. Este predominio de las matemáticas en nuestra vida, con todas sus conexiones interdisciplinarias, ofrece motivos claros y suficientes para que sea una asignatura obligatoria para aquellos alumnos que cursan el Programa del Diploma completo.

## Presentación de los cursos

Debido a las diversas necesidades, intereses y capacidades de los alumnos, existen cuatro cursos distintos de matemáticas pensados para diferentes grupos de alumnos: aquellos que quieren estudiar matemáticas en profundidad como una disciplina en sí misma o por su interés en materias afines; los que desean adquirir un cierto grado de comprensión y conocimiento que les ayude en el estudio de otras asignaturas; y aquellos que todavía no son conscientes de la relación que pueden tener las matemáticas con sus estudios y con la vida cotidiana. Cada curso está concebido para satisfacer las necesidades de un grupo concreto de alumnos. Así pues, los alumnos deben elegir cuidadosamente el curso más adecuado para ellos.

Para tomar esta decisión, se debe aconsejar a cada alumno que tenga en cuenta los siguientes factores:

- Las destrezas matemáticas que posee y el área de las matemáticas en la que pueda obtener mejores resultados
- Su interés personal en las matemáticas y las áreas de la asignatura que puedan resultarle más interesantes
- Las otras asignaturas que elige en el Programa del Diploma
- Sus planes académicos para el futuro, en concreto, las asignaturas que desea estudiar
- La profesión que desea desempeñar en el futuro

Se espera que los profesores presten ayuda en este proceso y aconsejen a los alumnos.

## Estudios Matemáticos NM

Este curso se ofrece solo en el Nivel Medio (NM) y su nivel es equivalente al de Matemáticas NM, pero aborda distintas necesidades. Hace hincapié en las aplicaciones de las matemáticas y la parte más extensa es sobre técnicas estadísticas. Está diseñado para alumnos con distintas capacidades y niveles de conocimiento matemáticos, y les ofrece oportunidades para aprender conceptos y técnicas importantes, así como para comprender una amplia variedad de temas matemáticos. Asimismo, los prepara para ser capaces de resolver problemas en distintos contextos, desarrollar un razonamiento matemático más complejo y mejorar su pensamiento crítico. El proyecto individual consiste en un trabajo extenso basado en una investigación personal que implica la recopilación, el análisis y la evaluación de información. Los alumnos que realizan este curso están bien preparados para las carreras de ciencias sociales, humanidades, lenguas o artes. Es posible que necesiten hacer uso, en sus futuros estudios, de la estadística y el pensamiento lógico que aprendan como parte del curso de Estudios Matemáticos NM.

## Matemáticas NM

Este curso está destinado a alumnos que ya tienen conocimientos sobre los conceptos matemáticos fundamentales y que poseen las destrezas necesarias para aplicar correctamente técnicas matemáticas sencillas. La mayoría de estos alumnos va a necesitar una formación matemática sólida como preparación para sus estudios posteriores en áreas tales como la química, la economía, la psicología, y la administración y gestión de empresas.

## Matemáticas NS

Este curso está destinado a alumnos con una buena formación matemática que poseen una serie de destrezas analíticas y técnicas. Para la mayoría de estos alumnos, las matemáticas constituirán uno de los componentes fundamentales de sus estudios universitarios, como materia en sí misma o en áreas tales como la física, la ingeniería y la tecnología. Para otros la elección puede deberse a que tengan un gran interés por las matemáticas, les atraigan sus desafíos y disfruten con la resolución de los problemas que se plantean.

## Ampliación de Matemáticas NS

Este curso se ofrece solo en el Nivel Superior (NS). Está destinado a alumnos con una sólida formación matemática que han alcanzado un alto nivel de competencia en una serie de destrezas analíticas y técnicas, y que muestran un interés considerable por la materia. La mayor parte de estos alumnos pretende seguir estudios de matemáticas en la universidad, bien como materia en sí misma o bien como componente fundamental de algún área relacionada con ella. El curso se ha concebido específicamente para que los alumnos puedan comprender en profundidad diversas ramas de las matemáticas y conocer también sus aplicaciones prácticas. Se espera que los alumnos que elijan este curso también elijan Matemáticas NS.

**Nota:** Matemáticas NS es un curso ideal para aquellos alumnos que desean hacer de las matemáticas un componente importante en sus estudios universitarios, bien como materia en sí misma o como parte de cursos como física, ingeniería o tecnología. No se debe considerar necesario que tales alumnos realicen la Ampliación de Matemáticas NS. Por el contrario, Ampliación de Matemáticas NS es un curso opcional para alumnos con una aptitud e interés especiales en las matemáticas, que los capacitará para estudiar algunos aspectos más amplios y profundos de las mismas, pero no es, en ningún caso, una titulación necesaria para seguir estudios superiores de matemáticas.

## Matemáticas NS: descripción del curso

Este curso se centra en el desarrollo de importantes conceptos matemáticos de forma comprensible, coherente y rigurosa. Ello se consigue mediante un enfoque cuidadosamente equilibrado. Se pretende que los alumnos apliquen sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas extraídos de una diversidad de contextos. En el desarrollo de los temas se debe dar importancia a la justificación y la demostración de los resultados. Los alumnos que elijan este curso lograrán desarrollar su comprensión de las formas y las estructuras matemáticas y han de estar capacitados para apreciar las relaciones entre conceptos pertenecientes a distintos temas. También se les debe animar a desarrollar las destrezas necesarias para continuar su formación matemática en otros ámbitos de aprendizaje.

El componente de la evaluación interna, la exploración, ofrece a los alumnos una oportunidad para el desarrollo de su aprendizaje matemático de forma independiente. Se anima a que los alumnos adopten un enfoque reflexivo respecto a diversas actividades matemáticas y que exploren distintas ideas matemáticas. La exploración también permite que los alumnos trabajen sin las limitaciones de tiempo de los exámenes escritos y que desarrollen las destrezas necesarias para exponer ideas matemáticas.

Este es un curso muy exigente, donde los alumnos deben estudiar una amplia variedad de temas matemáticos a través de distintos enfoques y con distintos niveles de profundidad. Los alumnos que deseen estudiar matemáticas de un modo menos riguroso deben optar por una de las asignaturas del Nivel Medio, Matemáticas NM o Estudios Matemáticos NM. Los alumnos que deseen estudiar un curso incluso más riguroso y exigente deberían considerar la posibilidad de cursar Ampliación de Matemáticas NS además de Matemáticas NS.

## Conocimientos previos

Las matemáticas constituyen una materia lineal y se espera que la mayoría de los alumnos que elijan un curso de matemáticas del Programa del Diploma hayan estudiado matemáticas durante, al menos, 10 años. Los alumnos habrán estudiado una gran variedad de temas, con distintos enfoques de la enseñanza y el aprendizaje. Por lo tanto, contarán con una amplia diversidad de destrezas y conocimientos al comenzar el curso de Matemáticas NS. La mayoría tendrá alguna formación en aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, probabilidad y estadística. A algunos les resultará familiar el enfoque de indagación y es probable que hayan tenido ocasión de realizar un trabajo extenso de matemáticas.

Al comienzo de la sección del programa de estudios, hay una lista de temas que, se presume, los alumnos deben ya conocer para el curso de Matemáticas NS. Se entiende que algunos de ellos pueden ser desconocidos para algunos alumnos, pero se prevé que puede haber otros temas dentro del programa de estudios que los alumnos ya conozcan. Los profesores deben planificar la enseñanza de modo que se incorporen los temas mencionados que sean desconocidos para sus alumnos.

## Vínculos con el Programa de los Años Intermedios

Los temas relacionados con los conocimientos previos de los cursos del Programa del Diploma (PD) han sido elaborados conjuntamente con la *Guía de Matemáticas* del Programa de los Años Intermedios (PAI). Los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas del PD se basan en los enfoques utilizados en el PAI. Estos incluyen investigaciones, exploración y una variedad de herramientas de evaluación.

El documento *El continuo de Matemáticas del IB: del PAI al Programa del Diploma* (noviembre de 2010) está disponible en las páginas de matemáticas del PD en el Centro pedagógico en línea (CPEL). Esta extensa publicación se centra en la coherencia entre las matemáticas en el Programa de los Años Intermedios y el

Programa del Diploma. Se desarrolló en respuesta a los comentarios proporcionados por los Colegios del Mundo del IB, que expresaban la necesidad de articular la transición de Matemáticas del Programa de los Años Intermedios a los cursos de matemáticas del Programa del Diploma. La publicación también destaca las similitudes y diferencias entre las matemáticas del PAI y las del PD, y constituye un valioso recurso para los profesores.

## Matemáticas y Teoría del Conocimiento

La *Guía de Teoría del Conocimiento* (marzo de 2006) identifica cuatro formas de conocimiento, y se puede afirmar que todas ellas tienen una función en la adquisición de conocimientos matemáticos. Si bien es probable que, en un principio, las matemáticas estén inspiradas por los datos de la percepción sensorial, estas están dominadas por la razón y algunos matemáticos sostienen que su materia es un lenguaje que, de algún modo, es universal. Sin embargo, tampoco hay duda alguna de que los matemáticos perciben la belleza en las matemáticas y que la emoción puede ser un motor poderoso en la búsqueda del conocimiento matemático.

Como un área de conocimiento, las matemáticas parecen proporcionar una certeza que, quizás, falta en otras disciplinas. Esto puede estar relacionado con la “pureza” de la materia, que la hace a veces parecer divorciada de la realidad. Sin embargo, las matemáticas también proporcionan un conocimiento importante sobre el mundo, y el uso de las matemáticas en la ciencia y la tecnología ha constituido una de las fuerzas impulsoras de los avances científicos.

A pesar de todo su indudable poder para facilitar el entendimiento y el cambio, las matemáticas son finalmente un fenómeno desconcertante. Un interrogante fundamental para todos los entendidos es si el conocimiento matemático realmente existe con independencia de nuestro pensamiento respecto del mismo; ¿está “esperando ser descubierto” o es una creación del ser humano?

Se debe atraer la atención de los alumnos hacia cuestiones que relacionan la Teoría del Conocimiento (TdC) con las matemáticas, y animarlos a plantear tales cuestiones por sí mismos, en las clases de Matemáticas y en las de Teoría del Conocimiento. Esto incluye el cuestionamiento de todas las afirmaciones anteriores. En la columna “Vínculos” del contenido del programa de estudios se proporcionan ejemplos relacionados con Teoría del Conocimiento. Los profesores también pueden discutir sobre cuestiones tales como las que se plantean en la sección “Áreas de conocimiento” de la *Guía de Teoría del Conocimiento*.

## Matemáticas y la dimensión internacional

Las matemáticas son, de algún modo, un lenguaje internacional y, aparte de algunas ligeras diferencias en la notación, los matemáticos de todo el mundo se pueden comunicar en su campo. Aunque las matemáticas trascienden la política, la religión y la nacionalidad, a través de la historia grandes civilizaciones deben su éxito, en parte, a la capacidad de sus matemáticos para crear y mantener estructuras sociales y arquitectónicas complejas.

A pesar de los recientes avances en el desarrollo de las tecnologías de la información y las comunicaciones, el intercambio global de información e ideas matemáticas no es un fenómeno nuevo y ha sido esencial para el desarrollo de las matemáticas. En efecto, muchos de los fundamentos de la matemática moderna fueron establecidos hace muchos siglos por las civilizaciones árabe, griega, india y china, entre otras. Los profesores pueden utilizar sitios web que incluyan líneas de tiempo para mostrar las contribuciones que las distintas civilizaciones han hecho a las matemáticas y no solo por sus contenidos matemáticos. Dar a conocer los personajes y personalidades de los matemáticos en cuestión, así como el contexto histórico en el que trabajaban, pone de relieve la dimensión humana y cultural de las matemáticas.

La importancia de las ciencias y la tecnología en el mundo cotidiano es evidente, pero el papel fundamental de las matemáticas no está tan claramente reconocido. Es el lenguaje de la ciencia y sustenta la mayoría de los desarrollos en las ciencias y la tecnología. Un buen ejemplo de ello es la revolución digital que está transformando el mundo, basada en el sistema de numeración binario de las matemáticas.

Ya existen varios organismos internacionales para promover las matemáticas. Se anima a los alumnos a acceder a los sitios web de las organizaciones matemáticas internacionales para apreciar mejor la dimensión internacional y participar en las cuestiones globales en torno a la materia.

En la columna “Vínculos” del programa de estudios se proporcionan ejemplos de temas globales relacionados con la mentalidad internacional (**Dimensión internacional**).

## Objetivos generales

### Objetivos generales del Grupo 5

Todos los cursos de matemáticas del Grupo 5 tienen como meta permitir a los alumnos:

1. Disfrutar de las matemáticas y llegar a apreciar la elegancia y las posibilidades que ofrecen
2. Desarrollar una comprensión de los principios y la naturaleza de la asignatura
3. Comunicarse con claridad y confianza en diversos contextos
4. Desarrollar el pensamiento lógico, crítico y creativo, y desarrollar paciencia y constancia en la resolución de problemas
5. Emplear y perfeccionar sus capacidades de abstracción y generalización
6. Aplicar destrezas a distintas situaciones, a otras áreas de conocimiento y a futuros desarrollos
7. Apreciar cómo los avances tecnológicos han influido en los avances en matemáticas, y viceversa
8. Apreciar las implicaciones morales, sociales y éticas del trabajo de los matemáticos y las aplicaciones de las matemáticas
9. Apreciar la dimensión internacional de las matemáticas, reconociendo su universalidad y sus perspectivas multiculturales e históricas
10. Valorar la contribución de las matemáticas a otras disciplinas y como un área de conocimiento específica en el curso de Teoría del Conocimiento

## Objetivos de evaluación

La resolución de problemas es fundamental en el aprendizaje de matemáticas, e implica la adquisición de destrezas y conceptos matemáticos en una amplia variedad de situaciones, incluidos los problemas que no son de rutina, los problemas abiertos y los problemas de la vida real. Tras haber completado el curso de Matemáticas NS del Programa del Diploma, se espera que los alumnos demuestren lo siguiente:

1. **Conocimiento y comprensión:** recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de los hechos, los conceptos y las técnicas matemáticas en una diversidad de contextos conocidos y desconocidos
2. **Resolución de problemas:** recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de las destrezas, los resultados y los modelos matemáticos, tanto en contextos reales como abstractos, para resolver problemas
3. **Comunicación e interpretación:** transformar en matemáticas contextos realistas comunes; hacer comentarios sobre el contexto; dibujar aproximadamente o con precisión diagramas, gráficos o construcciones matemáticas tanto en papel como utilizando medios tecnológicos; registrar métodos, soluciones y conclusiones utilizando notación estandarizada
4. **Tecnología:** utilizar los medios tecnológicos de forma precisa, adecuada y eficaz para explorar nuevas ideas y resolver problemas
5. **Razonamiento:** elaborar argumentos matemáticos mediante el uso de enunciados precisos, deducciones lógicas e inferencia, y mediante la manipulación de expresiones matemáticas
6. **Enfoques basados en la indagación:** investigar situaciones desconocidas, abstractas y concretas, que conllevan la organización y el análisis de información, la formulación de conjeturas, la extracción de conclusiones y la comprobación de su validez

## Resumen del programa de estudios

Componente del programa de estudios	Horas lectivas
	NS
Todas las unidades son obligatorias. Los alumnos deberán estudiar todos los temas de cada una de las unidades del programa de estudios que se especifican en esta guía. Los alumnos también deben estar familiarizados con los temas que se mencionan en la sección de conocimientos previos.	
<b>Unidad 1</b> Álgebra	30
<b>Unidad 2</b> Funciones y ecuaciones	22
<b>Unidad 3</b> Funciones circulares y trigonometría	22
<b>Unidad 4</b> Vectores	24
<b>Unidad 5</b> Estadística y probabilidad	36
<b>Unidad 6</b> Análisis	48
<b>Unidades opcionales</b> Los alumnos deberán estudiar todos los temas de una de las siguientes unidades opcionales, según se especifican en la descripción detallada del programa de estudios. <b>Unidad 7</b> Estadística y probabilidad <b>Unidad 8</b> Conjuntos, relaciones y grupos <b>Unidad 9</b> Análisis <b>Unidad 10</b> Matemática discreta	48
<b>Exploración matemática</b> La evaluación interna en Matemáticas NS es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas.	10
<b>Total de horas lectivas</b>	240

## Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje del curso

A lo largo del curso de Matemáticas NS del Programa del Diploma, se debe animar a los alumnos a desarrollar su comprensión de la metodología y práctica de esta disciplina. Se deben introducir de forma adecuada los procesos de **indagación matemática, utilización de modelos matemáticos y el uso de la tecnología**. Estos procesos deben utilizarse a lo largo de todo el curso, y no tratarlos de modo aislado.

### Indagación matemática

El perfil de la comunidad de aprendizaje del IB fomenta el aprendizaje a través de la experimentación, el cuestionamiento y el descubrimiento. En las clases del IB, los alumnos deben, por lo general, aprender matemáticas por medio de la participación activa en actividades de aprendizaje, en lugar de ser receptores de la enseñanza. Los profesores deben pues proporcionar a los alumnos oportunidades de aprender a través de la indagación matemática. Este enfoque está ilustrado en la figura 2.

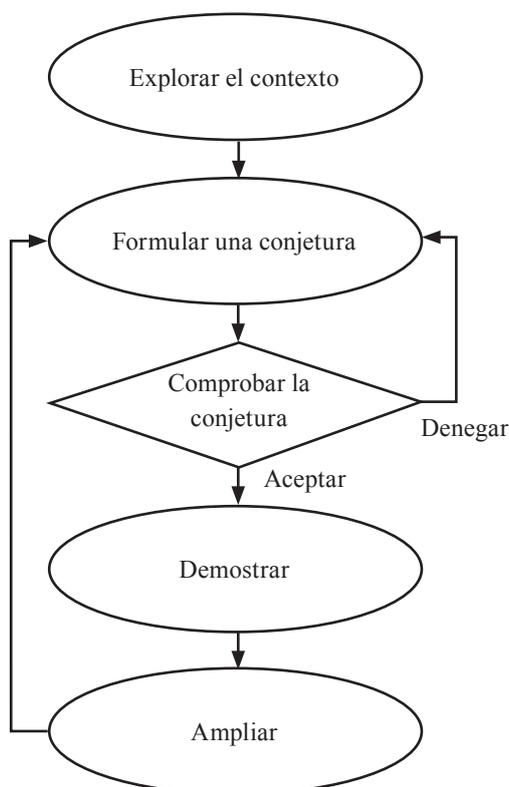


Figura 2

## Utilización de modelos matemáticos

Los alumnos han de ser capaces de utilizar las matemáticas para resolver problemas de la vida real. Interesar a los alumnos en el proceso de utilización de modelos matemáticos proporciona tales oportunidades. Los alumnos deben desarrollar modelos, aplicarlos y analizarlos de modo crítico. Este enfoque está ilustrado en la figura 3.

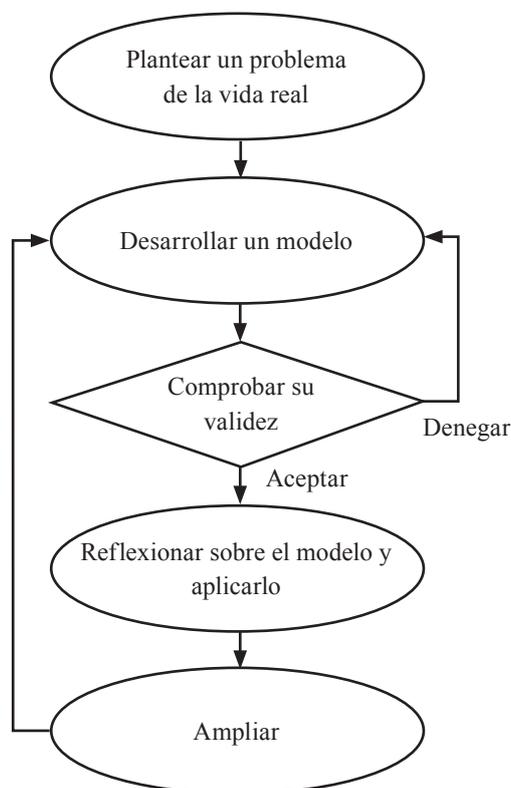


Figura 3

## Tecnología

La tecnología es una herramienta poderosa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se puede utilizar para potenciar la visualización y ayudar al alumno a comprender conceptos matemáticos. Puede ser útil en la recopilación, registro, organización y análisis de datos. También permite incrementar el ámbito de los tipos de problemas accesibles a los alumnos. El uso de la tecnología aumenta la viabilidad para que los alumnos trabajen en contextos de problemas interesantes donde reflexionan, razonan, resuelven problemas y toman decisiones.

Los profesores deben comenzar por proporcionar una orientación sustancial al ligar los temas vinculantes de la **indagación matemática**, la **utilización de modelos matemáticos** y el **uso de la tecnología**, y animar después gradualmente a los alumnos a hacerse más independientes como indagadores y como pensadores. Los alumnos del IB deben aprender a convertirse en sólidos comunicadores en el lenguaje de las matemáticas. Los profesores deben crear un entorno de aprendizaje seguro en el que los alumnos se sientan cómodos al asumir riesgos.

Se anima a que los profesores relacionen las matemáticas objeto de estudio con otras asignaturas y con la vida real, en especial con temas de especial importancia e interés para los alumnos. Se deben incorporar a las clases las cuestiones y los problemas cotidianos para motivar a los alumnos y que los materiales mantengan su pertinencia; en la columna “Vínculos” del programa de estudios se proporcionan sugerencias. La exploración

matemática ofrece una oportunidad de investigar la utilidad, la pertinencia y la presencia de las matemáticas en la vida cotidiana y añade una dimensión más al curso. La comunicación se debe basar en formas matemáticas (por ejemplo, fórmulas, diagramas, gráficos, etc.), acompañadas de los comentarios pertinentes. La utilización de modelos, la investigación, la reflexión, la implicación personal y la comunicación matemática deben ser, por tanto, características destacadas en la clase de matemáticas del Programa del Diploma.

Para obtener más información sobre los enfoques de la enseñanza de un curso del Programa del Diploma, véase la publicación *El Programa del Diploma: de los principios a la práctica* (abril de 2009). El Centro pedagógico en línea (CPEL) ofrece una variedad de recursos de ayuda para los profesores y, en el sitio web público, se encuentra disponible la información sobre los talleres de desarrollo profesional.

## Estructura del programa de estudios

- **Contenido:** esta columna especifica, dentro de cada unidad, los temas que se deben tratar.
- **Información adicional:** esta columna contiene información más detallada acerca de los temas específicos incluidos en la columna “Contenido”. Esto aclara los contenidos con vistas a los exámenes.
- **Vínculos:** esta columna proporciona vínculos útiles con los objetivos generales del curso de Matemáticas NS, sugerencias para debates, ejemplos de la vida real e ideas para seguir investigando. **Estas sugerencias son solo una guía para presentar e ilustrar los temas, y no son exhaustivas.** Los vínculos están rotulados como se muestra a continuación:

<b>Aplicación</b>	Ejemplos de la vida real y vínculos con otros cursos del Programa del Diploma
<b>Dimensión internacional</b>	Mentalidad internacional con relación al tema
<b>Objetivo general 8</b>	Implicaciones morales, sociales y éticas del tema
<b>TdC</b>	Sugerencias para el debate (Teoría del Conocimiento)

Téngase en cuenta que cualquier referencia en la columna “Vínculos” del programa de estudios a las guías de otros cursos será siempre a las versiones vigentes de dichas guías (2012).

## Observaciones sobre el programa de estudios

- Las fórmulas solo se incluyen en este documento donde pueda existir alguna ambigüedad. Todas las fórmulas que se requieren para el curso se encuentran en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y Ampliación de Matemáticas NS.
- El término “tecnología” designa cualquier tipo de calculadora o computador disponible. Sin embargo, existen restricciones sobre los medios tecnológicos que se pueden usar en los exámenes; estas se especificarán en los documentos pertinentes.
- Los términos “análisis” y “enfoque analítico” se usan generalmente para referirse a un enfoque que no hace uso de la tecnología.

## Programación del curso

Se ha de impartir el contenido de las seis unidades del programa de estudios y una de las unidades opcionales, aunque no necesariamente en el orden en que aparecen en esta guía. Se espera que los profesores programen el curso de modo que se responda a las necesidades de sus alumnos y se incluyan, cuando sea necesario, los temas señalados en la sección de conocimientos previos.

## Integración de la exploración matemática

El trabajo relacionado con la exploración debe integrarse totalmente en la programación del curso. En la sección sobre la evaluación interna y en el material de ayuda al profesor se proporciona información sobre cómo hacerlo.

## Temporalización

La carga horaria recomendada para los cursos del Nivel Superior es de 240 horas. En el caso de Matemáticas NS, se espera que 10 de esas horas se dediquen a la exploración. La distribución de tiempo establecida en esta guía es aproximada y tiene por finalidad sugerir cómo podrían distribuirse las restantes 230 horas de enseñanza del programa de estudios. Sin embargo, el tiempo exacto dedicado a cada unidad dependerá de diversos factores, como la formación previa y el nivel de preparación de cada alumno. Los profesores deben pues ajustar este esquema a las necesidades de sus alumnos.

## Uso de calculadoras

Se espera que los alumnos dispongan de una calculadora de pantalla gráfica durante el curso, en todo momento. Se proporcionará a los colegios información actualizada con respecto a los requisitos mínimos a medida que la tecnología evolucione. Los profesores y los colegios deben supervisar el uso de las calculadoras de acuerdo con la reglamentación sobre las mismas. En el *Manual de procedimientos del Programa del Diploma* se proporciona un reglamento sobre los tipos de calculadoras permitidos en los exámenes. Se puede obtener más información y asesoramiento en el documento *Material de ayuda al profesor de Matemáticas NS y NM: calculadoras de pantalla gráfica* (septiembre de 2005) y en el CPEL.

## Cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y Ampliación de Matemáticas NS

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones de este cuadernillo durante el examen. Se recomienda a los profesores asegurarse de que los alumnos estén familiarizados con el contenido de este documento desde el principio del curso. El colegio será el encargado de descargarlo desde IBIS o el CPEL, comprobar que no contenga errores de impresión y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

## Material de ayuda al profesor

Esta guía se complementa con una serie de materiales de ayuda al profesor. Los materiales incluyen asesoramiento para los profesores en cuanto a la presentación, planificación y corrección de la exploración, así como exámenes de muestra y esquemas de calificación.

## Términos de instrucción y notación

Los profesores y los alumnos deberán conocer la notación del IB y los términos de instrucción (anteriormente llamados “términos de examen”), ya que se emplean sin explicación en las pruebas de examen. El glosario de términos de instrucción y la notación aparecen como apéndices en esta guía.

## Temas relacionados con los conocimientos previos

Como ya se mencionó anteriormente en el apartado sobre conocimientos previos, se espera que todos los alumnos tengan una amplia experiencia matemática previa, aunque esto suele variar. Se espera que los alumnos de Matemáticas NS estén familiarizados con los siguientes temas antes de los exámenes, ya que las preguntas presuponen el conocimiento de los mismos. Los profesores deberán, por tanto, asegurarse de que cualquier tema de esta lista que sus alumnos no dominen al principio del curso se imparta en las primeras etapas del mismo. Deberán también tener en cuenta el conocimiento matemático que sus alumnos ya posean a la hora de diseñar una programación del curso adecuada para Matemáticas NS. Esta lista incluye los conocimientos, junto con los contenidos del programa de estudios, que son imprescindibles para poder completar con éxito el curso de Matemáticas NS.

Los alumnos también deben conocer las unidades de longitud, masa y tiempo del SI (Sistema Internacional) y sus unidades derivadas.

Tema	Contenido
<b>Número</b>	<p>Uso habitual de la suma, resta, multiplicación y división con enteros, decimales y fracciones, incluido el orden de las operaciones</p> <p>Exponentes racionales</p> <p>Simplificación de expresiones con radicales (irracionales o no), incluida la racionalización de denominadores</p> <p>Números y factores (divisores) primos, incluido el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo</p> <p>Aplicaciones sencillas de razones, porcentajes y proporciones, en relación con la semejanza</p> <p>Definición y uso elemental del valor absoluto (módulo), <math> a </math></p> <p>Redondeo, aproximaciones decimales y cifras significativas, incluyendo la estimación de errores</p> <p>Expresión de números en forma estándar (notación científica), es decir, <math>a \times 10^k</math>, <math>1 \leq a &lt; 10</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math></p>
<b>Conjuntos y números</b>	<p>Concepto y notación de conjunto, elemento, conjunto universal (referencial), conjunto vacío (nulo), conjunto complementario, subconjunto, igualdad de conjuntos, conjuntos disjuntos. Operaciones con conjuntos: unión e intersección. Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Diagramas de Venn.</p> <p>Conjuntos de números: números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.</p> <p>Intervalos de la recta real utilizando la notación de conjuntos y las inecuaciones. Conjunto de soluciones de una inecuación lineal indicado en la recta numérica y expresado mediante la notación de conjuntos.</p> <p>Aplicaciones entre conjuntos; conjuntos de pares ordenados</p>

Tema	Contenido
<b>Álgebra</b>	<p>Manejo de expresiones lineales y cuadráticas, incluyendo factorización, desarrollo, completar el cuadrado y uso de la fórmula</p> <p>Transformación, cálculo del valor numérico y combinación de expresiones sencillas. Se deben incluir ejemplos relacionados con otras asignaturas, en especial las de ciencias.</p> <p>Funciones lineales, sus gráficos, pendiente e intersección con el eje <math>y</math></p> <p>Suma y resta de fracciones algebraicas sencillas</p> <p>Propiedades de las relaciones de orden: <math>&lt;</math>, <math>\leq</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math></p> <p>Resolución de ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita, incluidos los casos con coeficientes racionales</p> <p>Resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas, usando la factorización y completando el cuadrado</p> <p>Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas</p>
<b>Trigonometría</b>	<p>Medida de ángulos en grados. Rumbos. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Aplicaciones sencillas a la resolución de triángulos.</p> <p>Teorema de Pitágoras y su recíproco</p>
<b>Geometría</b>	<p>Transformaciones geométricas sencillas: traslación, simetría, rotación, homotecia. Congruencia y semejanza, incluido el concepto de razón de una homotecia.</p> <p>El círculo, centro y radio, área y circunferencia. Los términos “arco”, “sector circular”, “cuerda”, “tangente” y “segmento circular”.</p> <p>Perímetro y área de las figuras planas. Propiedades de los triángulos y los cuadriláteros, incluidos paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados, cometas (trapezoides simétricos) y trapecios; figuras combinadas. Volúmenes de ortoedros, pirámides, esferas, cilindros y conos. Clasificación de prismas y pirámides, incluidos los tetraedros.</p>
<b>Geometría cartesiana</b>	<p>Geometría elemental del plano, incluido el concepto de dimensión de punto, recta, plano y espacio. Ecuación de la recta en la forma <math>y = mx + c</math>. Rectas paralelas y perpendiculares, incluidos <math>m_1 = m_2</math> y <math>m_1 m_2 = -1</math>.</p> <p>El plano cartesiano; pares ordenados <math>(x, y)</math> origen, ejes. Punto medio de un segmento de recta y distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.</p>
<b>Estadística y probabilidad</b>	<p>Estadística descriptiva: recopilación de datos primarios, representación pictórica o gráfica, incluidos histogramas de frecuencia y gráficos de frecuencia acumulada</p> <p>Obtención de datos estadísticos sencillos a partir de datos discretos y continuos, incluidos la media, la mediana, la moda, los cuartiles, el rango, el rango intercuartil y los percentiles</p> <p>Cálculo de las probabilidades de sucesos simples</p>

# Contenido del programa de estudios

## Unidad I (tronco común): Álgebra

30 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en introducir algunos conceptos y aplicaciones algebraicos elementales.

	Contenido	Información adicional	Vínculos
1.1	<p>Progresiones aritméticas y series aritméticas; suma finita de series aritméticas; progresiones geométricas y series geométricas; suma finita e infinita de series geométricas</p> <p>Notación de sumatoria</p> <p>Aplicaciones</p>	<p>Se pueden generar progresiones y presentarlas de distintas maneras, incluyendo funciones recursivas.</p> <p>Relacionar las series geométricas infinitas con los conceptos de límite y convergencia del apartado 6.1</p> <p>Ejemplos incluyen el interés compuesto y el crecimiento de poblaciones.</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> la leyenda del ajedrez (Sissa ibn Dahir)</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> Aryabhata suele considerarse el “padre del álgebra”. Comparar con al-Khawarizmi.</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> uso de diversos alfabetos en la notación matemática (por ejemplo, primer término y diferencia de una progresión aritmética)</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿En qué medida el conocimiento matemático ha de ser coherente con la intuición?</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Algunas constantes matemáticas (<math>\pi</math>, <math>e</math>, <math>\phi</math>, números de Fibonacci) aparecen en la naturaleza de modo sistemático. ¿Qué nos dice esto sobre el conocimiento matemático?</p> <p>(continúa en la página siguiente)</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>1.2</b> Potencias y logaritmos Propiedades de las potencias; propiedades de los logaritmos Cambio de base</p>	<p>Las potencias y los logaritmos se desarrollan más ampliamente en el apartado 2.4.</p>	<p>(proviene de la página anterior)</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿De qué modo se utiliza la intuición matemática como fundamento de una demostración formal? (Método de Gauss para calcular la suma de enteros del 1 al 100.)</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> prestamos a corto plazo con altas tasas de interés. ¿Cómo puede el conocimiento matemático llevar a la explotación de los individuos o, por el contrario, a su protección contra la extorsión?</p> <p><b>Aplicación:</b> Física 7.2, 13.2 (desintegración radiactiva y física nuclear)</p> <p><b>Aplicación:</b> Química 18.1, 18.2 (cálculo del pH y soluciones tampón)</p> <p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas y de la ciencia. ¿Son los logaritmos una invención o un descubrimiento? (Este tema ofrece una oportunidad a los profesores y alumnos para la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas.)</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>1.3</b></p>	<p>Reglas de conteo, incluidas permutaciones y combinaciones</p> <p>Teorema del binomio</p> <p>Desarrollo de <math>(a + b)^n</math>, <math>n \in \mathbb{N}</math></p> <p><b>No se requieren:</b></p> <p>Permutaciones con repetición</p> <p>Permutaciones circulares</p> <p>Demostración del teorema del binomio</p>	<p>Se requiere ser capaz de hallar <math>\binom{n}{r}</math> y <math>{}^n P_r</math> haciendo uso tanto de la fórmula como de la tecnología. Relacionar con el apartado 5.4.</p> <p>Relacionar con la distribución binomial del apartado 5.6</p>	<p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. Las relaciones imprevisibles entre el triángulo de Pascal, los métodos de conteo y los coeficientes de los polinomios. ¿Existe una verdad subyacente que puede encontrarse al relacionar lo anterior?</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> las propiedades del triángulo de Pascal eran conocidas por diferentes culturas con anterioridad a Pascal (por ejemplo, el matemático chino Yang Hui).</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> ¿cuántos billetes distintos puede haber en una lotería? ¿Qué nos dice esto sobre la ética de vender billetes de lotería a aquellos que no comprenden las implicaciones de estas grandes cantidades?</p>
<p><b>1.4</b></p>	<p>Demostración por inducción matemática</p>	<p>Esto se relaciona con una amplia variedad de temas, por ejemplo: números complejos, derivadas, sumas de series y divisibilidad.</p>	<p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas y de la ciencia. Distinto significado de la inducción en matemáticas y en ciencia.</p> <p><b>TdC:</b> afirmación de conocimiento en matemáticas. ¿Nos proporcionan las demostraciones un conocimiento absolutamente seguro?</p> <p><b>TdC:</b> comunidades de conocimiento. ¿Quién juzga la validez de una demostración?</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>1.5</b></p>	<p>Números complejos: el número <math>i = \sqrt{-1}</math>; los términos parte real, parte imaginaria, conjugado, módulo y argumento</p> <p>Forma cartesiana: <math>z = a + ib</math></p> <p>Sumas, productos y cocientes de números complejos</p>	<p>Al resolver problemas, es posible que los alumnos necesiten hacer uso de la tecnología.</p>	<p><b>Aplicación:</b> conceptos de la ingeniería eléctrica. La impedancia como una combinación de resistencia y reactancia; también potencia aparente como una combinación de potencias real y reactiva. Estas combinaciones toman la forma <math>z = a + ib</math>.</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿Las palabras “complejo” e “imaginario” hacen que los conceptos sean más difíciles que si tuviesen otros nombres?</p> <p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. El número “<math>i</math>”, ¿ha sido una invención o un descubrimiento?</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. ¿Por qué el número “<math>i</math>” aparece en tantas leyes fundamentales de la física?</p>
<p><b>1.6</b></p>	<p>La forma módulo-argumental (polar)</p> $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r \operatorname{cis}\theta = r e^{i\theta}$ <p>El plano complejo</p>	<p><math>r e^{i\theta}</math> también se conoce como la forma de Euler. Se requiere ser capaz de realizar la conversión de una forma a otra.</p> <p>El plano complejo también se conoce como diagrama de Argand.</p>	<p><b>Aplicación:</b> conceptos de la ingeniería eléctrica. Ángulo de fase y diferencia de fase, factor de potencia y potencia aparente como una magnitud compleja expresada en forma polar.</p> <p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. ¿Ya existía el plano complejo antes de ser utilizado para representar los números complejos de forma geométrica?</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿Por qué se podría hablar de la belleza de la expresión <math>e^{i\pi} + 1 = 0</math>?</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
1.7	Potencias de números complejos: el teorema de de Moivre raíces $n$ -ésimas de un número complejo	Demostración por inducción matemática para $n \in \mathbb{Z}^+$	<b>TdC:</b> el razonamiento y las matemáticas. ¿En qué consiste el razonamiento matemático y qué papel juegan las demostraciones en este tipo de razonamiento? ¿Existen ejemplos de demostraciones que no sean matemáticas?
1.8	Raíces conjugadas de ecuaciones polinómicas con coeficientes reales	Relacionar con los apartados 2.5 y 2.7	
1.9	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales (un máximo de tres ecuaciones con tres incógnitas), incluidos los casos con solución única, con infinitas soluciones o sin solución	Estos sistemas se deben resolver utilizando tanto métodos algebraicos como tecnológicos, por ejemplo, reducción por filas. Los sistemas que tienen solución se pueden denominar compatibles. Cuando un sistema tiene infinitas soluciones, se podrá pedir la solución general. Relacionar con los vectores del apartado 4.7	<b>TdC:</b> matemáticas, sentido, percepción y razonamiento. Si se pueden encontrar soluciones en dimensiones de orden superior, ¿se puede razonar que esos espacios existen más allá de la percepción de nuestros sentidos?

## Unidad 2 (tronco común): Funciones y ecuaciones

22 horas

Los objetivos generales de esta unidad consisten en estudiar el concepto de función como tema unificador de las matemáticas y aplicar las funciones como método para abordar distintas situaciones en matemáticas. Se espera que se haga un amplio uso de la tecnología tanto en el desarrollo de los temas de esta unidad como en sus aplicaciones.

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>2.1</b></p> <p>Concepto de función <math>f : x \mapsto f(x)</math> : dominio, recorrido; imagen (valor)</p> <p>Funciones pares e impares</p> <p>Composición de funciones <math>f \circ g</math></p> <p>Función identidad</p> <p>Funciones inyectivas y no inyectivas</p> <p>Función inversa <math>f^{-1}</math>, incluida restricción del dominio. Funciones que coinciden con su inversa.</p>	<p><math>(f \circ g)(x) = f(g(x))</math>. Relacionar con el apartado 6.2.</p> <p>Relacionar con el apartado 3.4</p> <p>Relacionar con el apartado 6.2</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> la notación de funciones fue desarrollada por distintos matemáticos durante los siglos XVII y XVIII. ¿Cómo se llegó a aceptar internacionalmente la notación que usamos en la actualidad?</p> <p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. ¿Las matemáticas consisten simplemente en la manipulación de símbolos bajo un conjunto de reglas formales?</p>
<p><b>2.2</b></p> <p>Gráfico de una función, su ecuación <math>y = f(x)</math></p> <p>Indagación de las características clave de los gráficos, como máximos y mínimos, puntos de corte con los ejes, asíntotas horizontales y verticales, simetrías, y consideración de dominio y recorrido</p> <p>Gráficos de las funciones <math>y =  f(x) </math> y <math>y = f( x )</math></p> <p>Gráfico de <math>y = \frac{1}{f(x)}</math> dado el gráfico de <math>y = f(x)</math></p>	<p>Uso de la tecnología para obtener el gráfico de diversas funciones</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. ¿El estudio del gráfico de una función contiene el mismo nivel de rigor matemático que el estudio algebraico (analítico) de la función?</p> <p><b>Aplicación:</b> interpretar y dibujar aproximadamente gráficos; Geografía NM/NS (destrezas geográficas); Química 11.3.1</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> enfoque analítico del grupo Bourbaki frente al enfoque visual de Mandelbrot</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>2.3</b></p> <p>Transformaciones de gráficos: traslaciones; estiramientos; simetrías respecto a los ejes</p> <p>El gráfico de la función inversa como una simetría respecto a <math>y = x</math></p>	<p>Relacionar con el apartado 3.4. Se espera que los alumnos comprendan el efecto de las transformaciones tanto en la expresión algebraica como en el gráfico de la función.</p>	<p><b>Aplicación:</b> Economía NM/NS 1.1 (desplazamiento de las curvas de oferta y demanda)</p>
<p><b>2.4</b></p> <p>La función racional <math>x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}</math>, y su gráfico</p> <p>La función <math>x \mapsto a^x</math>, <math>a &gt; 0</math> y su gráfico</p> <p>La función <math>x \mapsto \log_a x</math>, <math>x &gt; 0</math> y su gráfico</p>	<p>La función recíproca es un caso particular.</p> <p>Los gráficos deben incluir las asíntotas y las intersecciones con los ejes.</p> <p>Funciones exponencial y logarítmica como inversas una de otra</p> <p>Relacionar con el apartado 6.2 y la importancia de <math>e</math></p> <p>Aplicación de conceptos en los apartados 2.1, 2.2 y 2.3</p>	<p><b>Aplicación:</b> Geografía NM/NS (destrezas geográficas); Física NM/NS 7.2 (desintegración radiactiva); Química NM/NS 16.3 (energía de activación); Economía NM/NS 3.2 (tipos de cambio)</p>
<p><b>2.5</b></p> <p>Funciones polinómicas y sus gráficos</p> <p>Teorema del resto y teorema del factor</p> <p>Teorema fundamental del álgebra</p>	<p>Significado gráfico de los factores múltiples</p> <p>Relación entre el grado de una función polinómica y el posible número de cortes con el eje <math>x</math></p>	

	Contenido	Información adicional	Vínculos
2.6	<p>Resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula</p> <p>Uso del discriminante <math>\Delta = b^2 - 4ac</math> para determinar la naturaleza de las raíces</p> <p>Resolución de ecuaciones polinómicas, tanto de forma gráfica como algebraica</p> <p>Suma y producto de las raíces de una ecuación polinómica</p>	<p>Podrán denominarse tanto raíces de ecuaciones como ceros de las funciones.</p> <p>Relacionar la resolución de ecuaciones polinómicas con las raíces conjugadas del apartado 1.8</p> <p>Para la ecuación polinómica <math>\sum_{r=0}^n a_r x^r = 0</math>, la suma es <math>-\frac{a_{n-1}}{a_n}</math>, el producto es <math>\frac{(-1)^n a_0}{a_n}</math>.</p>	<p><b>Aplicación:</b> Química 17.2 (ley de equilibrio)</p> <p><b>Aplicación:</b> Física 2.1 (cinemática)</p> <p><b>Aplicación:</b> Física 4.2 (cambios de energía en el movimiento armónico simple)</p> <p><b>Aplicación:</b> Física 9.1 (solo NS) (movimiento de proyectiles)</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> la frase “crecimiento exponencial” se utiliza popularmente para describir una variedad de fenómenos. ¿Constituye esto un uso equivocado de un término matemático?</p>
2.7	<p>Resolución de <math>a^x = b</math> utilizando logaritmos</p> <p>Uso de la tecnología para resolver una diversidad de ecuaciones, incluidas aquellas para las que no existe un enfoque analítico adecuado</p> <p>Resolución de <math>g(x) \geq f(x)</math></p> <p>Métodos gráficos o algebraicos para polinomios sencillos de grado menor o igual que 3</p> <p>Uso de la tecnología para estas y otras funciones</p>		

## Unidad 3 (tronco común): Funciones circulares y trigonometría 22 horas

Los objetivos generales de esta unidad consisten en estudiar las funciones circulares, introducir algunas relaciones trigonométricas importantes y resolver triángulos aplicando la trigonometría. En los exámenes se debe asumir que las medidas son en radianes, salvo que se indique lo contrario, por ejemplo,  $x \mapsto \text{sen } x$ .

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>3.1</b> El círculo: medida de ángulos en radianes Longitud de un arco; área del sector circular</p>	<p>La medida en radianes puede expresarse como múltiplos de <math>\pi</math>, o como números decimales. Relacionar con el apartado 6.2.</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> el origen de los grados en la matemática mesopotámica y por qué utilizamos minutos y segundos para medir el tiempo</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿Por qué utilizamos radianes? (La naturaleza arbitraria de la medida en grados frente a los radianes como números reales, y las implicaciones de la utilización de estas dos medidas sobre la forma de los gráficos sinusoidales.)</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. Si la trigonometría se basa en triángulos rectángulos, ¿cómo podemos razonablemente considerar razones trigonométricas de ángulos mayores que un ángulo recto?</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> origen de la palabra “seno”</p> <p><b>Aplicación:</b> Física NM/NS 2.2 (fuerzas y dinámica)</p> <p><b>Aplicación:</b> triangulación utilizada en el sistema de posicionamiento global (GPS)</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> ¿por qué Pitágoras vincula el estudio de la música con las matemáticas?</p> <p style="text-align: right;">(continúa en la página siguiente)</p>
<p><b>3.2</b> Definición de <math>\cos \theta</math>, <math>\text{sen } \theta</math> y <math>\tan \theta</math> a partir del círculo de radio unidad Valores exactos del sen, cos y tan de <math>0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}</math> y sus múltiplos Definición de las razones trigonométricas recíprocas <math>\text{sec } \theta</math>, <math>\text{csc } \theta</math> y <math>\text{cotan } \theta</math> Relación fundamental: <math>\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1</math>; <math>1 + \tan^2 \theta = \text{sec}^2 \theta</math>; <math>1 + \cotan^2 \theta = \text{csc}^2 \theta</math></p>	<p>Dedución de las fórmulas del ángulo doble a partir de las fórmulas de la suma y diferencia de dos ángulos Cálculo de posibles valores de razones trigonométricas sin hallar <math>\theta</math>, por ejemplo, calcular el <math>\text{sen } 2\theta</math> dado el <math>\text{sen } \theta</math></p>	
<p><b>3.3</b> Fórmulas de la suma y diferencia de dos ángulos Fórmulas del ángulo doble <b>No se requiere:</b> Demostración de las fórmulas</p>		

<p><b>3.4</b></p>	<p>Composición de funciones de la forma  <math>f(x) = a \operatorname{sen}(b(x+c)) + d</math>                      Aplicaciones</p>		<p>(proviene de la página anterior)  <b>Aplicación:</b> conceptos de la ingeniería eléctrica. Generación de voltaje sinusoidal.  <b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Se puede expresar la música utilizando las matemáticas. ¿Significa esto que la música es matemática, que las matemáticas son musicales o que ambas son el reflejo de una “verdad” común?  <b>Aplicación:</b> Física NM/NS 4.1 (cinemática del movimiento armónico simple)</p>
<p><b>3.5</b></p>	<p>Las funciones trigonométricas inversas:  <math>x \mapsto \operatorname{arcsen} x, x \mapsto \operatorname{arccos} x, x \mapsto \operatorname{arctan} x;</math>                      sus dominios y recorridos; sus gráficos</p>		
<p><b>3.6</b></p>	<p>Métodos gráfico y algebraico de resolución de ecuaciones trigonométricas en un intervalo finito, incluido el uso de las identidades trigonométricas y la factorización  <b>No se requiere:</b>                      La solución general de ecuaciones trigonométricas</p>		<p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. ¿Cómo puede existir un número infinito de soluciones discretas para una ecuación?</p>
<p><b>3.7</b></p>	<p>Teorema del coseno                      Teorema del seno, incluido el caso ambiguo                      Área del triángulo mediante la fórmula  <math>\frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C</math>                      Aplicaciones</p>	<p>Ejemplos pueden ser la navegación o problemas en dos y tres dimensiones, incluidos ángulos de elevación y depresión.</p>	<p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. Si los ángulos de un triángulo pueden sumar menos de <math>180^\circ</math>, <math>180^\circ</math> o más de <math>180^\circ</math>, ¿qué nos dice esto acerca de la “verdad” de la suma de los ángulos de un triángulo y sobre la naturaleza del conocimiento matemático?  <b>Aplicación:</b> Física NM/NS 1.3 (vectores y escalares); Física NM/NS 2.2 (fuerzas y dinámica)  <b>Dimensión internacional:</b> uso de la triangulación para hallar la curvatura de la Tierra con el fin de resolver una disputa sobre la gravedad de Newton entre Inglaterra y Francia</p>

# Unidad 4 (tronco común): Vectores

24 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en proporcionar una introducción al uso de los vectores en dos y tres dimensiones, y facilitar la resolución de problemas relacionados con puntos, rectas y planos.

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>4.1</b></p> <p>Concepto de vector</p> <p>Representación de vectores mediante segmentos de recta orientados</p> <p>Vectores unitarios; la base <math>\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}</math></p> <p>Componentes de un vector:</p> $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$ <p>Enfoques algebraico y geométrico de los siguientes temas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Suma y diferencia de dos vectores</li> <li>• El vector nulo <math>\mathbf{0}</math>, el vector <math>-\mathbf{v}</math></li> <li>• Multiplicación por un escalar, <math>k\mathbf{v}</math></li> <li>• Módulo de un vector: <math> \mathbf{v} </math></li> <li>• Vectores de posición <math>\vec{OA} = \mathbf{a}</math></li> </ul> <p><math>\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}</math></p>	<p>Demostraciones de propiedades geométricas mediante vectores</p> <p>La distancia entre dos puntos A y B es el módulo de <math>\vec{AB}</math>.</p>	<p><b>Objetivo general 8:</b> los vectores se utilizan para resolver muchos problemas sobre la localización de la posición. Esto se puede usar para salvar a un navegante perdido o para destruir un edificio con una bomba guiada por láser.</p> <p><b>Aplicación:</b> Física NM/NS 1.3 (vectores y escalares); Física NM/NS 2.2 (fuerzas y dinámica)</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. Algunas demostraciones se pueden hacer utilizando distintos conceptos matemáticos. ¿Qué nos dice esto sobre el conocimiento matemático?</p>	

	Contenido	Información adicional	Vínculos
4.2	Definición de producto escalar de dos vectores Propiedades del producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(k\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} =  \mathbf{v} ^2$ Ángulo entre dos vectores Vectores perpendiculares; vectores paralelos	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} =  \mathbf{v}  \mathbf{w} \cos\theta$ , donde $\theta$ es el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ Relacionar con el apartado 3.6 Para vectores no nulos, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ equivale a que los vectores son perpendiculares. Para vectores paralelos, $ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}  =  \mathbf{v}  \mathbf{w} $	<b>Vínculos</b> <b>Aplicación:</b> Física NM/NS 2.2 (fuerzas y dinámica) <b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. ¿Por qué esta definición de producto escalar?
4.3	Ecuación vectorial de una recta en dos y tres dimensiones: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ Aplicaciones sencillas a la cinemática Ángulo entre dos rectas	Conocimiento de las siguientes formas de la ecuación de una recta: Forma paramétrica: $x = x_0 + \lambda l, y = y_0 + \lambda m, z = z_0 + \lambda n$ Forma cartesiana: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$	<b>Aplicación:</b> modelización del movimiento lineal en tres dimensiones <b>Aplicación:</b> dispositivos de navegación, por ejemplo, el sistema de posicionamiento global (GPS) <b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. ¿Por qué se podría argumentar que la representación vectorial de las rectas es mejor que la cartesiana?
4.4	Rectas coincidentes, rectas paralelas, rectas que se cortan, rectas alabeadas, distinción entre estos casos Puntos de intersección		

	Contenido	Información adicional	Vínculos
4.5	Definición del vector producto vectorial de dos vectores Propiedades del producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ $(k\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ Interpretación geométrica de $ \mathbf{v} \times \mathbf{w} $	$\mathbf{v} \times \mathbf{w} =  \mathbf{v}  \mathbf{w} \sin\theta$ , donde $\theta$ es el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ , y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario cuya dirección viene dada por la regla de la mano derecha (o del sacacorchos)  Áreas de triángulos y paralelogramos	<b>Aplicación:</b> Física NM/NS 6.3 (fuerza y campo magnético)
4.6	Ecuación vectorial de un plano $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$ Utilización del vector normal para obtener la expresión $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ Ecuación cartesiana de un plano $ax + by + cz = d$	Relacionar con el apartado 1.9 Interpretación geométrica de la soluciones	<b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿Por qué las representaciones simbólicas de objetos en tres dimensiones son más fáciles de manejar que las representaciones visuales? ¿Qué nos dice esto sobre nuestro conocimiento de las matemáticas de otras dimensiones?
4.7	Intersecciones de: una recta y un plano; dos planos; tres planos Ángulo entre: una recta y un plano; dos planos		

## Unidad 5 (tronco común): Estadística y probabilidad

36 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en introducir conceptos básicos. Consta de tres partes: manejo y representación de datos estadísticos (5.1), leyes de la probabilidad (5.2-5.4) y variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad (5.5-5.7). Se supone que la mayoría de los cálculos se harán con calculadora de pantalla gráfica. Se hará énfasis en la comprensión y la interpretación de los resultados obtenidos. Las tablas estadísticas ya no estarán permitidas en los exámenes.

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>5.1</b></p> <p>Conceptos de población, muestra, muestra aleatoria y distribuciones de frecuencia de datos discretos y continuos</p> <p>Datos agrupados: valores centrales de los intervalos, amplitud del intervalo, límites superior e inferior de los intervalos</p> <p>Media, varianza y desviación típica</p> <p><b>No se requiere:</b></p> <p>Estimación de la media y la varianza de una población a partir de una muestra</p>	<p>En las pruebas 1 y 2 de los exámenes, el conjunto de datos será considerado como la población.</p> <p>En los exámenes, se deben utilizar las siguientes fórmulas:</p> $\mu = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$ $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \mu^2$	<p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. ¿Por qué a veces las matemáticas y la estadística se tratan como disciplinas distintas?</p> <p><b>TdC:</b> la naturaleza del conocimiento. ¿Hay alguna diferencia entre información y datos?</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> ¿conduce el uso de la estadística a un excesivo énfasis en los atributos que son fácilmente medibles sobre aquellos que no lo son?</p> <p><b>Aplicación:</b> Psicología NM/NS (estadística descriptiva); Geografía NM/NS (destrezas geográficas); Biología 1.1.2 (análisis estadístico)</p> <p><b>Aplicación:</b> métodos de recopilación de datos en la vida real (censal frente a muestral)</p> <p><b>Aplicación:</b> uso de la estadística para conducir a engaño en los informes de los medios de comunicación</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>5.2</b></p> <p>Conceptos de experimento, resultado, resultados equiprobables, espacio muestral (U) y suceso</p> <p>Probabilidad de un suceso <math>A</math> como <math>P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}</math></p> <p>Los sucesos complementarios <math>A</math> y <math>A'</math> (no <math>A</math>)</p> <p>Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol, reglas de conteo y tablas de resultados en la resolución de problemas</p>		<p><b>Objetivo general 8:</b> ¿por qué se ha alegado que las teorías basadas en probabilidades calculables en los casinos son perniciosas cuando se aplican a la vida cotidiana (por ejemplo, la economía)?</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> desarrollo de la teoría matemática de la probabilidad en Francia en el siglo XVII</p>
<p><b>5.3</b></p> <p>Sucesos compuestos, la fórmula para <math>P(A \cup B)</math></p> <p>Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes</p>		
<p><b>5.4</b></p> <p>Probabilidad condicionada; definición</p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ <p>Sucesos independientes; definición</p> $P(A B) = P(A) = P(A B')$ <p>Uso del teorema de Bayes para un máximo de tres sucesos</p>	<p>Uso de <math>P(A \cap B) = P(A)P(B)</math> para mostrar la independencia</p>	<p><b>Aplicación:</b> uso de métodos probabilísticos en estudios médicos para evaluar los factores de riesgo en ciertas enfermedades</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. ¿La independencia, tal como se define en términos de probabilidad, es la misma que se encuentra en la experiencia cotidiana?</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
5.5	<p>Concepto de variables aleatorias discretas y continuas y sus distribuciones de probabilidad</p> <p>Definición y uso de las funciones de densidad de probabilidad</p> <p>Valor esperado (media), moda, mediana, varianza y desviación típica</p> <p>Aplicaciones</p>	<p>Para una variable aleatoria continua, un valor en el cual la función de densidad de probabilidad presenta un valor máximo se denomina una moda.</p> <p>Algunos ejemplos son los juegos de azar.</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿Hasta qué punto son fiables las muestras de datos?</p> <p><b>Aplicación:</b> ganancias esperadas en las compañías de seguros</p>
5.6	<p>Distribución binomial, su media y su varianza</p> <p>Distribución de Poisson, su media y su varianza</p> <p><b>No se requiere:</b> Demostración formal de las medias y las varianzas</p>	<p>Relacionar con el teorema del binomio del apartado 1.3</p> <p>Condiciones bajo las cuales las variables aleatorias tienen esas distribuciones</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo real. ¿La distribución binomial es alguna vez un modelo útil para una situación real de la vida cotidiana?</p>
5.7	<p>Distribución normal</p> <p>Propiedades de la distribución normal</p> <p>Tipificación o estandarización de variables en una distribución normal</p>	<p>Las probabilidades y valores de la variable se deben hallar haciendo uso de la tecnología.</p> <p>La variable tipificada (<math>z</math>) da el número de unidades de desviación típica que dista de la media.</p> <p>Relacionar con el apartado 2.3</p>	<p><b>Aplicación:</b> Química NM/NS 6.2 (teoría de las colisiones); Psicología NS (estadística descriptiva); Biología NM/NS 1.1.3 (análisis estadístico)</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> ¿por qué el mal uso de la distribución normal podría llevar a inferencias y conclusiones peligrosas?</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. ¿Hasta qué punto son fiables los modelos matemáticos tales como la distribución normal?</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> deducción de Moivre de la distribución normal y uso que de ella hace Quetelet para describir <i>l'homme moyen</i>.</p>

# Unidad 6 (tronco común): Análisis

48 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en introducir conceptos y técnicas elementales del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones.

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>6.1</b></p>	<p>Ideas informales de límite, continuidad y convergencia</p> <p>Definición de derivada, a partir del concepto</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ <p>Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y como medida de la razón de cambio entre dos variables</p> <p>Obtención de las ecuaciones de las tangentes y las normales</p> <p>Identificación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función</p> <p>Derivada segunda</p> <p>Derivadas de orden superior</p>	<p>Se incluye <math>\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1</math></p> <p>Relacionar con el apartado 1.1</p> <p>Uso de esta definición únicamente para hallar las derivadas de los polinomios</p> <p>Relacionar con el teorema del binomio del apartado 1.3</p> <p>Las dos formas de notación, <math>\frac{dy}{dx}</math> y <math>f'(x)</math> para la derivada primera</p> <p>Uso tanto del álgebra como de la tecnología</p> <p>Las dos formas de notación, <math>\frac{d^2y}{dx^2}</math> y <math>f''(x)</math> para la derivada segunda</p> <p>Familiaridad con las notaciones <math>\frac{d^n y}{dx^n}</math> y <math>f^{(n)}(x)</math>.</p> <p>Relacionar con la inducción del apartado 1.4.</p>	<p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. El hecho de que Leibniz y Newton llegaran al análisis casi al mismo tiempo, ¿le da sustento al argumento de que las matemáticas existen antes de que se descubran?</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> cómo la desconianza de los griegos por el cero impidió que el trabajo de Arquímedes diera lugar al análisis.</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> indagar sobre los intentos de los matemáticos indios (año 500-1000) de explicar la división por cero</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el actor del conocimiento. ¿Qué nos dice el conflicto entre Newton y Leibniz sobre la emoción humana y el descubrimiento matemático?</p> <p><b>Aplicación:</b> Economía NS 1.5 (teoría de la empresa); Química NM/NS 11.3.4 (técnicas gráficas); Física MN/NS 2.1 (cinemática)</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>6.2</b></p>	<p>Derivadas de <math>x^n</math>, <math>\sen x</math>, <math>\cos x</math>, <math>\tan x</math>, <math>e^x</math> y <math>\ln x</math></p> <p>Derivada de la suma de funciones y del producto de funciones</p> <p>Regla del producto y del cociente</p> <p>Regla de la cadena para la composición de funciones</p> <p>Tipos de cambio relacionados</p> <p>Derivación implícita</p> <p>Derivadas de <math>\sec x</math>, <math>\csc x</math>, <math>\cotan x</math>, <math>a^x</math>, <math>\log_a x</math>, <math>\arcsen x</math>, <math>\arccos x</math> y <math>\arctan x</math></p>		<p><b>Aplicación:</b> Física NS 2.4 (movimiento circular uniforme); Física 12.1 (fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida)</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. Euler fue capaz de realizar avances importantes en el análisis matemático antes de que hubiesen sido establecidas por Cauchy y otros las bases teóricas sólidas del cálculo. Sin embargo, ciertos trabajos no fueron posibles hasta después de la obra de Cauchy. ¿Qué nos dice esto acerca de la importancia de las demostraciones y la naturaleza de las matemáticas?</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo real. El concepto aparentemente abstracto del análisis permite crear modelos matemáticos que hacen posible proezas humanas tales como que el hombre llegue a la Luna. ¿Qué nos dice esto acerca de los vínculos entre los modelos matemáticos y la realidad física?</p>
<p><b>6.3</b></p>	<p>Máximos y mínimos locales</p> <p>Problemas de optimización</p> <p>Puntos de inflexión con pendiente nula y no nula</p> <p>Comportamiento de los gráficos de las funciones, incluida la relación entre los gráficos de <math>f</math>, <math>f'</math> y <math>f''</math></p> <p><b>No se requiere:</b></p> <p>Puntos de inflexión donde <math>f''(x)</math> no está definida: por ejemplo, <math>y = x^{1/3}</math> en <math>(0, 0)</math></p>	<p>Comprobación de máximos y mínimos utilizando el cambio de signo en la derivada primera y el signo de la derivada segunda</p> <p>Uso de los términos "cóncava hacia arriba" para <math>f''(x) &gt; 0</math> y "cóncava hacia abajo" para <math>f''(x) &lt; 0</math></p> <p>En un punto de inflexión, <math>f''(x) = 0</math> y cambia el signo (cambia la concavidad).</p>	

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>6.4</b></p> <p>La integral indefinida como primitiva (antiderivada) de una función</p> <p>Integral indefinida de <math>x^n</math>, <math>\text{sen } x</math>, <math>\cos x</math> y <math>e^x</math></p> <p>Otras integrales indefinidas usando los resultados del apartado 6.2</p> <p>Composición de funciones de las anteriores con una función lineal</p>	<p>Interpretación de la integral indefinida como una familia de curvas</p> $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$ <p>Algunos ejemplos son: <math>\int (2x-1)^5 dx</math>, <math>\int \frac{1}{3x+4} dx</math></p> $y \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$	
<p><b>6.5</b></p> <p>Integración con una restricción para determinar la constante de integración</p> <p>Integrales definidas</p> <p>Área de la región encerrada por una curva y el eje <math>x</math> o el eje <math>y</math> en un intervalo dado; áreas de regiones encerradas por curvas</p> <p>Volúmenes de revolución alrededor del eje <math>x</math> o alrededor del eje <math>y</math></p>	<p>El valor de algunas integrales definidas solo se puede hallar mediante el uso de la tecnología.</p>	<p><b>Aplicación:</b> diseño industrial</p>
<p><b>6.6</b></p> <p>Problemas de cinemática relativos al desplazamiento <math>s</math>, la velocidad <math>v</math>, y la aceleración <math>a</math></p> <p>Distancia total recorrida</p>	$v = \frac{ds}{dt}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v \frac{dv}{ds}$ <p>Distancia total recorrida <math>= \int_{t_1}^{t_2}  v  dt</math></p>	<p><b>Aplicación:</b> Física NS 2.1 (cinemática)</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> ¿la inclusión de la cinemática como parte del tronco común de las matemáticas refleja una herencia cultural determinada? ¿Quién decide lo que forma parte de las matemáticas?</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
6.7	Integración por sustitución  Integración por partes	En los exámenes se proporcionarán las sustituciones no estándar.  Relacionar con el apartado 6.2  Ejemplos: $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ y $\int \ln x \, dx$  Integración por partes aplicada varias veces de forma sucesiva  Ejemplos: $\int x^2 e^x \, dx$ y $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$	

## Unidad 7 (opcional): Estadística y probabilidad

48 horas

Los objetivos generales de esta unidad opcional consisten en: proporcionar a los alumnos la oportunidad de abordar la estadística de un modo práctico, alcanzar un buen nivel de comprensión de la estadística y discriminar en qué situaciones se han de aplicar e interpretar los resultados obtenidos. Se espera que las calculadoras de pantalla gráfica se utilicen en el estudio de esta unidad opcional y, como mínimo, se exigirá que se utilicen para hallar la función de densidad de probabilidad, la función de distribución acumulada, la función de distribución acumulada inversa, los valores del parámetro  $p$  y los estadísticos de los contrastes (o tests), incluidos los cálculos para las siguientes distribuciones: binomial, Poisson, normal y  $t$ . Los alumnos han de plantear el problema en forma matemática y obtener después las soluciones con la calculadora de pantalla gráfica, indicándolo por escrito. En estas explicaciones no se debe utilizar el lenguaje específico de las calculadoras o de una marca de calculadoras determinada.

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>7.1</b></p> <p>Funciones de distribución acumulada para distribuciones discretas y distribuciones continuas</p> <p>Distribución geométrica</p> <p>Distribución binomial negativa</p> <p>Funciones generatrices de probabilidad para variables aleatorias discretas</p> <p>Uso de las funciones generatrices de probabilidad para calcular la media, la varianza y la distribución de la suma de <math>n</math> variables aleatorias independientes</p>	$G(t) = E(t^X) = \sum_x P(X = x)t^x$	<p><b>Dimensión internacional:</b> también conocida como distribución de Pascal</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> métodos estadísticos de compresión de ficheros de datos</p>
<p><b>7.2</b></p> <p>Transformación lineal de una variable aleatoria unidimensional</p> <p>Media de combinaciones lineales de <math>n</math> variables aleatorias</p> <p>Varianza de combinaciones lineales de <math>n</math> variables aleatorias independientes</p> <p>Valor esperado del producto de variables aleatorias independientes</p>	$E(aX + b) = aE(X) + b,$ $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ $E(XY) = E(X)E(Y)$	

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>7.3</b> Estimadores y estimaciones sin sesgo Comparación de los estimadores sin sesgo basada en las varianzas</p> <p><math>\bar{X}</math> como estimador sin sesgo para <math>\mu</math> <math>S^2</math> como estimador sin sesgo para <math>\sigma^2</math></p>	<p><math>T</math> es un estimador sin sesgo del parámetro <math>\theta</math> si <math>E(T) = \theta</math>.</p> <p><math>T_1</math> es un estimador más eficiente que <math>T_2</math> si <math>\text{Var}(T_1) &lt; \text{Var}(T_2)</math>.</p> $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Si no conocemos el valor de un parámetro, ¿será siempre un estimador sin sesgo mejor que uno sesgado?</p>
<p><b>7.4</b> Una combinación lineal de variables aleatorias independientes normalmente distribuidas está normalmente distribuida. En particular:</p> $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ <p>Teorema central del límite</p>		<p><b>Objetivo general 8 y TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Sin el teorema central del límite, no habría estadísticas válidas en el ámbito de las ciencias humanas.</p> <p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. El teorema central del límite se puede demostrar matemáticamente (formalismo), pero su validez puede ser confirmada por sus aplicaciones (empirismo).</p>
<p><b>7.5</b> Intervalos de confianza para la media de una población normal</p>	<p>Uso de la distribución normal cuando <math>\sigma</math> es conocida y uso de la distribución <math>t</math> cuando <math>\sigma</math> es desconocida, con independencia del tamaño de la muestra. El caso de muestras bidimensionales (pareadas) se tratará como un ejemplo de técnica de muestreo unidimensional.</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Afirmar que la marca A es “mejor” en promedio que la marca B puede significar muy poco si existe un gran solapamiento entre los intervalos de confianza de las dos medias.</p> <p><b>Aplicación:</b> Geografía</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
7.6	<p>Hipótesis nula y alternativa, <math>H_0</math> y <math>H_1</math></p> <p>Nivel de significación</p> <p>Regiones críticas, valores críticos, valores del parámetro <math>p</math> y contrastes de una y de dos colas</p> <p>Errores de tipo I y de tipo II, incluidos los cálculos de sus probabilidades</p> <p>Contraste de hipótesis para la media de una población normal</p>	<p>Uso de la distribución normal cuando <math>\sigma</math> es conocida y de la distribución <math>t</math> cuando <math>\sigma</math> es desconocida, con independencia del tamaño de la muestra. El caso de muestras bidimensionales (pareadas) se tratará como un ejemplo de técnica de muestreo unidimensional.</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. En la práctica, ¿es lo mismo decir que un resultado es significativo que decir que es cierto?</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. ¿La capacidad de contrastar solo ciertos parámetros de una población afecta el modo en que se valoran las afirmaciones de conocimiento en las ciencias humanas?</p> <p><b>Aplicación:</b> ¿cuándo es más importante no cometer un error de tipo I y cuándo es más importante no cometer un error de tipo II?</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p>7.7</p> <p>Introducción a las distribuciones bidimensionales</p> <p>Covarianza y coeficiente de correlación momento-producto (para la población) <math>\rho</math></p> <p>Demostración de que <math>\rho = 0</math> en caso de independencia y <math>\pm 1</math> en caso de una relación lineal entre <math>X</math> e <math>Y</math></p> <p>Definición del coeficiente de correlación momento-producto (para una muestra) <math>R</math> en función de <math>n</math> observaciones pareadas en <math>X</math> e <math>Y</math>. Su aplicación para la estimación de <math>\rho</math>.</p>	<p>Discusión informal de situaciones comunes, por ejemplo, puntuaciones de exámenes de matemáticas puras y de estadística realizados por un grupo de alumnos, salario y edad de los profesores de un determinado colegio. Necesidad de una medida de la relación entre las variables y la posibilidad de predecir el valor de una de ellas conocido el valor de la otra.</p> $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY) - \mu_x \mu_y,$ <p>donde <math>\mu_x = E(X)</math>, <math>\mu_y = E(Y)</math></p> $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$ <p>Uso de <math>\rho</math> como una medida de la relación entre <math>X</math> e <math>Y</math>: los valores cercanos a 0 indican una relación débil y los valores cercanos a +1 o cercanos a -1 indican una relación fuerte.</p> $R = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n \bar{Y}^2 \right)}}$	<p><b>Vínculos</b></p> <p><b>Aplicación:</b> destrezas geográficas</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> la correlación entre el tabaco y el cáncer de pulmón se “descubrió” gracias a las matemáticas. La ciencia tuvo que justificar la causa.</p> <p><b>Aplicación:</b> uso de la tecnología para ajustar una serie de curvas a un conjunto de datos</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Suponiendo que un conjunto de datos se puede ajustar aproximadamente por una serie de curvas, ¿cómo se puede saber cuál de las ecuaciones representa el “verdadero” modelo?</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> el físico Frank Oppenheimer escribió: “la predicción solo depende de la suposición de que los patrones observados se repetirán”. Ese es el peligro de la extrapolación. Existen en el pasado muchos ejemplos de su fracaso, por ejemplo, el precio de las acciones, la propagación de enfermedades o el cambio climático.</p> <p>(continúa en la página siguiente)</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p>Interpretación informal de <math>r</math>, el valor observado de <math>R</math>. Diagramas de dispersión.</p> <p>Los siguientes temas se basan en el supuesto de distribuciones bidimensionales normales.</p> <p>Uso del estadístico <math>t</math> para contrastar la hipótesis nula <math>\rho = 0</math></p> <p>Conocimiento del hecho de que la regresión de <math>X</math> sobre <math>Y</math> (<math>E(X Y = y)</math>) y la de <math>Y</math> sobre <math>X</math> (<math>E(Y X = x)</math>) son lineales</p> <p>Estimaciones de mínimos cuadrados de estas rectas de regresión (no se requiere demostración)</p> <p>Uso de estas rectas de regresión para predecir el valor de una de las variables conocido el valor de la otra</p>	<p>Valores de <math>r</math> cercanos a 0 indican una relación débil entre <math>X</math> e <math>Y</math>, y valores cercanos a <math>\pm 1</math> indican una relación fuerte.</p> <p>Siempre que sea posible, se debe utilizar la calculadora de pantalla gráfica en el siguiente trabajo.</p> <p><math>R\sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}}</math> tiene la distribución <math>t</math> de Student con <math>(n-2)</math> grados de libertad.</p> $x - \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} (y - \bar{y})$ $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2} (y - \bar{y}),$ $y - \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x - \bar{x})$ $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} (x - \bar{x}).$	<p>(proviene de la página anterior)</p>

## Unidad 8 (opcional): Conjuntos, relaciones y grupos

48 horas

Los objetivos generales de esta unidad opcional consisten en proporcionar la oportunidad de estudiar importantes conceptos matemáticos e introducir los principios de la demostración a través del álgebra abstracta.

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>8.1</b></p> <p>Conjuntos finitos e infinitos. Subconjuntos.</p> <p>Operaciones entre conjuntos: unión; intersección; conjunto complementario, diferencia de conjuntos, diferencia simétrica</p> <p>Leyes de Morgan: propiedades distributiva, asociativa y conmutativa (para la unión y la intersección)</p>	<p>Ilustración de estas propiedades mediante diagramas de Venn</p> <p>Se podrá pedir a los alumnos que demuestren que dos conjuntos son iguales estableciendo que <math>A \subseteq B</math> y <math>B \subseteq A</math>.</p>	<p><b>TdC:</b> teoría de Cantor de los números transfinitos, paradoja de Russell, teoremas de incompletitud de Gödel</p> <p><b>Aplicación:</b> lógica, álgebra booleana, circuitos de computadores</p>
<p><b>8.2</b></p> <p>Pares ordenados: producto cartesiano de dos conjuntos</p> <p>Relaciones: relaciones de equivalencia; clases de equivalencia</p>	<p>Una relación de equivalencia en un conjunto establece una partición en el conjunto.</p>	<p><b>Aplicación y dimensión internacional:</b> los clanes escoceses</p>
<p><b>8.3</b></p> <p>Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas</p> <p>Composición de funciones y funciones inversas</p>	<p>El término codominio</p> <p>Saber que la composición de funciones no es una operación conmutativa, y que si <math>f</math> es una función biyectiva del conjunto <math>A</math> en el conjunto <math>B</math>, entonces <math>f^{-1}</math> existe y es una función biyectiva del conjunto <math>B</math> en el conjunto <math>A</math>.</p>	

	Contenido	Información adicional	Vínculos
8.4	<p>Operaciones binarias</p> <p>Tablas de operaciones (tablas de Cayley)</p>	<p>Una operación binaria <math>*</math> sobre un conjunto no vacío <math>S</math> es una regla que combina dos elementos cualesquiera <math>a, b \in S</math> para dar un único elemento <math>c</math>. Es decir, en esta definición, una operación binaria sobre un conjunto no es necesariamente una operación cerrada.</p>	
8.5	<p>Operaciones binarias: propiedades asociativa, distributiva y conmutativa</p>	<p>Operaciones aritméticas sobre <math>\mathbb{R}</math> y <math>\mathbb{C}</math></p> <p>Ejemplos de la propiedad distributiva pueden incluir el hecho de que, sobre <math>\mathbb{R}</math>, el producto es distributivo respecto a la suma, pero la suma no es distributiva respecto al producto.</p>	<p><b>TdC:</b> ¿cuáles son más importantes, los modelos generales o los ejemplos conocidos?</p>
8.6	<p>El elemento neutro <math>e</math></p> <p>El simétrico <math>a^{-1}</math> de un elemento <math>a</math></p> <p>Demostración de que se puede eliminar un elemento, <math>a</math>, por la izquierda o por la derecha, siempre que <math>a</math> tenga simétrico</p> <p>Demostración de la unicidad de los elementos neutro y simétrico</p>	<p>Para que <math>e</math> sea elemento neutro lo ha de ser por la derecha <math>a * e = a</math> y por la izquierda <math>e * a = a</math>.</p> <p>Para que sea simétrico lo ha de ser por la derecha <math>a * a^{-1} = e</math> y por la izquierda <math>a^{-1} * a = e</math>.</p>	

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>8.7</b></p>	<p>Definición de grupo <math>\{G, *\}</math>                      La tabla de operación de un grupo es un cuadrado latino, pero la recíproca es falsa.</p> <p>Grupos abelianos</p>	<p>El conjunto <math>G</math> para una operación dada <math>*</math> verifica:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>G</math> es cerrado para <math>*</math>.</li> <li><math>*</math> es asociativa.</li> <li><math>G</math> posee elemento neutro.</li> <li>Todo elemento de <math>G</math> tiene un simétrico en <math>G</math>.</li> </ul> <p><math>a * b = b * a</math>, para todo <math>a, b \in G</math>.</p>	<p><b>Aplicación:</b> existencia de una fórmula para las raíces de los polinomios</p> <p><b>Aplicación:</b> teoría de Galois sobre la imposibilidad de tales fórmulas para polinomios de grado mayor o igual que 5</p>
<p><b>8.8</b></p>	<p>Ejemplos de grupos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}</math> y <math>\mathbb{C}</math> respecto a la adición</li> <li>Enteros respecto a la adición módulo <math>n</math></li> <li>Enteros no nulos respecto a la multiplicación, módulo <math>p</math>, donde <math>p</math> es primo</li> </ul> <p>Simetrías de figuras planas, incluidos los triángulos equiláteros y los rectángulos</p> <p>Funciones invertibles respecto a la composición de funciones</p>	<p>La composición <math>T_2 \circ T_1</math> indica <math>T_1</math> seguido de <math>T_2</math>.</p>	<p><b>Aplicación:</b> el cubo de Rubik, medidas de tiempo, estructura de cristales, simetrías de moléculas, construcciones de cables y puntales; Física NS 2.2 (relatividad especial); la óctuple vía, la supersimetría</p>
<p><b>8.9</b></p>	<p>Orden de un grupo</p> <p>Orden de un elemento de un grupo</p> <p>Grupos cíclicos</p> <p>Generadores</p> <p>Demostración de que todos los grupos cíclicos son abelianos</p>		<p><b>Aplicación:</b> el círculo de quintas en música, números primos</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>8.10</b> Permutaciones respecto a la composición Notación de ciclos respecto a las permutaciones  Toda permutación se puede expresar como una composición de ciclos disjuntos. Orden de una combinación de ciclos</p>	<p>En los exámenes: la forma <math>p = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 3 &amp; 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> o en notación de ciclos (132) se usará para representar la permutación <math>1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2</math>.</p>	<p><b>Aplicación:</b> criptografía, campanología</p>
<p><b>8.11</b> Subgrupos, subgrupos propios   Demostración y aplicación de los criterios de subgrupo   Definición y ejemplos de clases laterales por la izquierda y por la derecha de un subgrupo de un grupo  Teorema de Lagrange  Demostración y aplicación del resultado de que el orden de un grupo finito es divisible por el orden de cualquiera de sus elementos. (Corolario del teorema de Lagrange.)</p>	<p>No son subgrupos propios ni el mismo grupo ni el subgrupo que contiene únicamente el elemento neutro. Supongamos que <math>\{G, *\}</math> es un grupo y <math>H</math> es un subconjunto no vacío de <math>G</math>. Entonces <math>\{H, *\}</math> es un subgrupo de <math>\{G, *\}</math> si <math>a * b^{-1} \in H</math> para todo <math>a, b \in H</math>. Supongamos que <math>\{G, *\}</math> es un grupo finito y <math>H</math> es un subconjunto no vacío de <math>G</math>. Entonces <math>\{H, *\}</math> es un subgrupo de <math>\{G, *\}</math> si <math>H</math> es cerrado respecto a <math>*</math>.</p>	<p><b>Aplicación:</b> descomposición en factores primos, ruptura de la simetría</p>

	Contenido	Información adicional	Vínculos
8.12	<p>Definición de homomorfismo de grupos</p> <p>Definición de núcleo de un homomorfismo</p> <p>Demostración de que el núcleo y la imagen de un homomorfismo son subgrupos</p> <p>Demostración de las propiedades de los homomorfismos para el elemento neutro y los elementos simétricos</p> <p>Isomorfismo de grupos</p> <p>El orden de un elemento permanece invariable por un isomorfismo.</p>	<p>Tanto de grupos finitos como infinitos</p> <p>Sean <math>\{G, *\}</math> y <math>\{H, \circ\}</math> grupos, entonces la función <math>f: G \rightarrow H</math> es un homomorfismo si <math>f(a * b) = f(a) \circ f(b)</math> para todo <math>a, b \in G</math>.</p> <p>Si <math>f: G \rightarrow H</math> es un homomorfismo de grupos, entonces <math>\text{Ker}(f)</math> es el conjunto de los <math>a \in G</math> tales que <math>f(a) = e_H</math>.</p> <p>Elemento neutro: sean <math>e_G</math> y <math>e_H</math> los elementos neutros de <math>\{G, *\}</math> y <math>\{H, \circ\}</math>, respectivamente, entonces <math>f(e_G) = e_H</math>.</p> <p>Elemento simétrico: <math>f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}</math> para todo <math>a \in G</math></p> <p>Tanto de grupos finitos como infinitos</p> <p>El homomorfismo <math>f: G \rightarrow H</math> es un isomorfismo si <math>f</math> es biyectiva.</p>	

## Unidad 9 (opcional): Análisis

48 horas

Los objetivos generales de esta unidad opcional consisten en la introducción de teoremas de límites y convergencia de series, así como la aplicación de resultados del análisis para resolver ecuaciones diferenciales.

	Contenido	Información adicional	Vínculos
9.1	Progresiones infinitas de números reales y su convergencia o divergencia	Tratamiento informal del límite de la suma, diferencia, producto y cociente; teorema del encaje de intervalos Por divergente se entiende que no es convergente.	<b>TdC:</b> la paradoja de Zenón, el impacto de las progresiones infinitas y los límites sobre nuestra comprensión del mundo físico
9.2	Convergencia de series infinitas Criterios de convergencia: criterio de comparación; criterio de comparación del límite; criterio de D'Alembert; criterio de la integral de Cauchy	La suma de una serie es el límite de la progresión de sus sumas parciales. Los alumnos deben saber que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ entonces la serie no es necesariamente convergente, pero si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ , la serie es divergente. $\sum \frac{1}{n^p}$ es convergente para $p > 1$ y divergente en caso contrario. Si $p = 1$ , la serie se llama armónica. Condiciones de convergencia El valor absoluto del error de truncamiento es menor que el siguiente término de la serie.	<b>TdC:</b> la idea de Euler de que $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ , ¿era un error o simplemente una visión alternativa?
	Las series- $p$ , $\sum \frac{1}{n^p}$ Series absolutamente convergentes Series condicionalmente convergentes Series alternadas Series de potencias: radio de convergencia e intervalo de convergencia. Determinación del radio de convergencia por el criterio de D'Alembert.		

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>9.3</b></p> <p>Continuidad y derivabilidad de una función en un punto</p> <p>Funciones continuas y funciones derivables</p>	<p>Criterio de continuidad:</p> $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ <p>Criterio de derivabilidad:</p> <p><math>f</math> es continua en <math>a</math> y</p> $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ <p>existen y son iguales.</p> <p>Los alumnos deben saber que una función puede ser continua pero no derivable en un punto, por ejemplo, <math>f(x) =  x </math> y funciones definidas a trozos sencillas.</p>	
<p><b>9.4</b></p> <p>La integral como límite de una suma; sumas superiores e inferiores de Riemann</p> <p>Teorema fundamental del cálculo</p> <p>Integrales impropias del tipo <math>\int_a^\infty f(x) dx</math></p>	$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(y) dy \right] = f(x)$	<p><b>Dimensión internacional:</b> ¿qué tan cerca se encontraba Arquímedes del cálculo integral?</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> contribución de los matemáticos árabes, chinos y de la India al desarrollo del análisis</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> Leibniz frente a Newton y frente a los “gigantes”, sobre cuyos hombros ambos se pararon; ¿quién merece el reconocimiento por los avances matemáticos?</p> <p><b>TdC:</b> considerar <math>f(x) = \frac{1}{x}</math>, <math>1 \leq x \leq \infty</math></p> <p>Un área infinita define, en su rotación, un volumen finito. ¿Es esto compatible con nuestra intuición? ¿Qué nos dice esto sobre el conocimiento matemático?</p>

Contenido	Información adicional	Vinculos
<p><b>9.5</b></p> <p>Ecuaciones diferenciales de primer orden</p> <p>Interpretaciones geométricas mediante campos de direcciones, incluida la identificación de isoclinas</p> <p>Resolución numérica de <math>\frac{dy}{dx} = f(x, y)</math> mediante el método de Euler</p> <p>Variables separables</p> <p>Ecuaciones diferenciales homogéneas <math>\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)</math> usando la sustitución <math>y = vx</math></p> <p>Resolución de <math>y' + P(x)y = Q(x)</math>, mediante el factor integrante</p>	<p><math>y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)</math>, <math>x_{n+1} = x_n + h</math>, donde <math>h</math> es una constante</p>	<p><b>Aplicación:</b> ecuaciones diferenciales en la vida real, por ejemplo:</p> <p>Ley de enfriamiento de Newton,</p> <p>Crecimiento demográfico</p> <p>La datación por el método del carbono 14</p>
<p><b>9.6</b></p> <p>Teorema de Rolle</p> <p>Teorema del valor medio</p> <p>Polinomios de Taylor; la expresión de Lagrange para el término complementario (resto)</p> <p>Desarrollo en serie de Maclaurin de <math>e^x</math>, <math>\text{sen } x</math>, <math>\cos x</math>, <math>\ln(1+x)</math>, <math>(1+x)^p</math>, <math>p \in \mathbb{Q}</math></p> <p>Obtención de nuevas series mediante sustitución, productos, integración y derivación</p> <p>Series de Taylor a partir de ecuaciones diferenciales</p>	<p>Aplicaciones a la aproximación de funciones; fórmula para el término complementario (resto) en función del valor de la derivada de orden <math>n + 1</math> en un punto intermedio</p> <p>Los alumnos deben tener en cuenta los intervalos de convergencia.</p>	<p><b>Dimensión internacional y TdC:</b> influencia de Bourbaki sobre la comprensión y la enseñanza de las matemáticas</p> <p><b>Dimensión internacional:</b> comparar con la obra de la escuela de Kerala</p>

	Contenido	Información adicional	Vinculos
9.7	<p>Cálculo de límites de la forma</p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ <p>Uso de la regla de l'Hôpital o la serie de Taylor</p>	<p>Las indeterminaciones <math>\frac{0}{0}</math> y <math>\frac{\infty}{\infty}</math></p> <p>Regla de l'Hôpital aplicada varias veces de forma sucesiva</p>	

## Unidad 10 (opcional): Matemática discreta

48 horas

El objetivo general de esta unidad opcional consiste en proporcionar a los alumnos la oportunidad de interesarse por el razonamiento lógico, el pensamiento algorítmico y sus aplicaciones.

	Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>10.1</b></p>	<p>Inducción fuerte Principio del palomar</p>	<p>Por ejemplo, las demostraciones del teorema fundamental de la aritmética y el hecho de que un árbol con <math>n</math> vértices tiene <math>n-1</math> aristas</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. Diferencia entre demostración y conjetura, por ejemplo, la conjetura de Goldbach. ¿Puede un enunciado matemático considerarse cierto antes de que se lo demuestre? <b>TdC:</b> demostración por contradicción</p>
<p><b>10.2</b></p>	<p><math>a   b \Rightarrow b = na</math> para algún <math>n \in \mathbb{Z}</math></p> <p>El teorema: <math>a   b</math> y <math>a   c \Rightarrow a   (bx \pm cy)</math> donde <math>x, y \in \mathbb{Z}</math></p> <p>La división y los algoritmos de Euclides</p> <p>Máximo común divisor, <math>\text{mcd}(a, b)</math>, y mínimo común múltiplo, <math>\text{mcm}(a, b)</math>, de dos enteros <math>a</math> y <math>b</math></p> <p>Números primos; números primos entre sí y teorema fundamental de la aritmética</p>	<p>El algoritmo de la división <math>a = bq + r</math>, <math>0 \leq r &lt; b</math></p> <p>El algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor de dos números enteros</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> el algoritmo de Euclides incluido en los <i>Elementos de Euclides</i>, escrito en Alejandría alrededor del año 300 a. C.</p> <p><b>Objetivo general 8:</b> uso de los números primos en criptografía. El posible impacto del descubrimiento de técnicas de factorización potentes sobre la seguridad en Internet y la seguridad bancaria.</p>
<p><b>10.3</b></p>	<p>Ecuaciones diofánticas lineales <math>ax + by = c</math></p>	<p>Soluciones generales y soluciones sujetas a restricciones. Por ejemplo, todas las soluciones han de ser positivas.</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> se describen en la <i>Aritmética</i> de Diofanto, escrita en Alejandría en el siglo III. Al estudiar la <i>Aritmética</i>, un matemático francés, Pierre de Fermat (1601–1665) escribió en el margen que había descubierto una demostración sencilla para las ecuaciones diofánticas de orden superior: el último teorema de Fermat.</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>10.4</b> Aritmética modular Resolución de congruencias lineales Resolución de sistemas de congruencias lineales (teorema Chino del resto)</p>		<p><b>Vínculos</b></p> <p><b>Dimensión internacional:</b> considerado por el matemático chino Sun Tzu en el siglo III</p>
<p><b>10.5</b> Representación de números enteros en distintas bases</p>	<p>En los exámenes no se plantearán preguntas que vayan más allá de la base 16.</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> los babilonios desarrollaron un sistema de numeración de base 60, y los mayas un sistema de numeración de base 20.</p>
<p><b>10.6</b> El pequeño teorema de Fermat</p>	<p><math>a^p = a \pmod{p}</math>, donde <math>p</math> es primo</p>	<p><b>TdC:</b> la naturaleza de las matemáticas. Algunos propósitos pueden perseguirse durante siglos antes de llegar a ser “útiles”.</p>
<p><b>10.7</b> Grafos, vértices, aristas y caras. Vértices adyacentes, aristas adyacentes. Grado de un vértice, secuencia de grados Lema del apretón de manos</p>	<p>Dos vértices son adyacentes si están unidos por una arista. Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice común.</p>	<p><b>Objetivo general 8:</b> mapas simbólicos, por ejemplo, los mapas del metro, las fórmulas estructurales de la química, los circuitos eléctricos</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. Demostración del teorema de los cuatro colores. Si un teorema se demuestra mediante un computador, ¿cómo podemos pretender afirmar su validez?</p>
<p>Grafos simples; grafos conexos; grafos completos; grafos bipartitos; grafos planarios; árboles; grafos ponderados, incluida la representación mediante tablas Subgrafos; complementario de un grafo Relación de Euler: <math>v - e + f = 2</math>; teoremas de grafos planarios incluyendo <math>e \leq 3v - 6</math>, <math>e \leq 2v - 4</math>, que conducen al resultado de que <math>\kappa_5</math> y <math>\kappa_{3,3}</math> no son planarios</p>	<p>Se debe resaltar que no se debe asumir que un grafo es simple, a menos que se indique específicamente. Puede usarse el término “tabla de adyacencia”.</p> <p>Si el grafo es simple y planario, <math>v \geq 3</math>, entonces <math>e \leq 3v - 6</math>.</p> <p>Si el grafo es simple, planario, no tiene ciclos de longitud 3 y <math>v \geq 3</math>, entonces <math>e \leq 2v - 4</math>.</p>	<p><b>Objetivo general 8:</b> importancia de los grafos planarios en la construcción de placas de circuitos</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. Aplicaciones de la característica de Euler (<math>v - e + f</math>) a dimensiones de orden superior. Su uso en la comprensión de las propiedades de las formas que no se pueden visualizar.</p>

Contenido	Información adicional	Vínculos
<p><b>10.8</b></p> <p>Recorridos, senderos, caminos, circuitos, ciclos</p> <p>Senderos y circuitos eulerianos</p> <p>Caminos y ciclos hamiltonianos</p>	<p>Un grafo conexo contiene un circuito euleriano si y solo si todos los vértices del grafo son de grado par.</p> <p>Solo un estudio elemental</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> el problema de “los puentes de Königsberg”</p>
<p><b>10.9</b></p> <p>Algoritmos de grafos: algoritmo de Kruskal; algoritmo de Dijkstra</p>		
<p><b>10.10</b></p> <p>El problema del “cartero chino”</p> <p><b>No se requiere:</b></p> <p>Grafos con más de cuatro vértices de grado impar</p> <p>El problema del “viajante”</p> <p>Algoritmo del vecino más próximo para establecer un límite superior</p> <p>Algoritmo de vértice borrado para establecer un límite inferior</p>	<p>Para determinar la ruta más corta en un grafo ponderado pasando al menos una vez por cada arista</p> <p>Para determinar el ciclo hamiltoniano de menos peso en un grafo completo ponderado</p>	<p><b>Dimensión internacional:</b> problema planteado por el matemático chino Kwan Mei-Ko en 1962</p> <p><b>TdC:</b> las matemáticas y las afirmaciones de conocimiento. ¿Cuánto tiempo le llevaría a un computador comprobar todos los ciclos hamiltonianos en un grafo completo, ponderado, con apenas 30 vértices?</p>
<p><b>10.11</b></p> <p>Relaciones de recurrencia. Condiciones iniciales, definición recursiva de una progresión.</p> <p>Resolución de relaciones de recurrencia lineal homogénea de primer y segundo grado con coeficientes constantes</p> <p>La relación de recurrencia lineal de primer grado</p> $u_n = au_{n-1} + b$ <p>Utilización de modelos matemáticos con relaciones de recurrencia</p>	<p>Se incluyen los casos en que la ecuación auxiliar tiene raíces iguales o raíces complejas.</p> <p>Resolución de problemas tales como los relacionados con el interés compuesto, la amortización de deuda y los problemas de conteo</p>	<p><b>TdC:</b> las matemáticas y el mundo. Conexiones de progresiones tales como la serie de Fibonacci con el arte y la biología.</p>

# Glosario de terminología: matemática discreta

## Introducción

Profesores y alumnos han de tener en cuenta que existen diversas terminologías en teoría de grafos y que cada libro de texto puede emplear distintas combinaciones de las mismas. Algunos ejemplos son: vértice/nodo/confluencia/punto; arista/ruta/arco; grado/orden de un vértice; aristas múltiples/aristas paralelas; lazo/bucle.

En las preguntas de examen del IB, se utilizará la terminología que aparece en el programa de estudios. Para mayor claridad se definen a continuación estos términos.

## Terminología

<b>Árbol</b>	Un grafo conexo que no contiene ciclos.
<b>Árbol generador de un grafo</b>	Un subgrafo que es un árbol y contiene todos los vértices del grafo.
<b>Árbol generador minimal</b>	Un árbol generador de un grafo ponderado que tiene un peso total mínimo.
<b>Árbol ponderado</b>	Un árbol en el que a cada arista se le asigna un número o peso.
<b>Aristas múltiples</b>	Ocurren cuando más de una arista conecta el mismo par de vértices.
<b>Camino</b>	Un recorrido sin vértices repetidos.
<b>Camino hamiltoniano</b>	Un camino que contiene todos los vértices del grafo.
<b>Ciclo</b>	Un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice y que no tiene más vértices repetidos.
<b>Ciclo hamiltoniano</b>	Un ciclo que contiene todos los vértices del grafo.
<b>Circuito</b>	Un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice y que no tiene aristas repetidas.
<b>Circuito euleriano</b>	Un circuito que contiene todas las aristas de un grafo.
<b>Complementario de un grafo <math>G</math></b>	Un grafo que tiene los mismos vértices que $G$ , pero tal que entre dos vértices cualesquiera existe una arista si y solo si no existe en $G$ .
<b>Grado de un vértice</b>	Número de aristas conectadas al vértice; un lazo aporta dos aristas, una por cada extremo.
<b>Grafo</b>	Consiste en un conjunto de vértices y un conjunto de aristas.
<b>Grafo bipartito</b>	Un grafo que admite una partición de sus vértices en dos conjuntos de modo que en cada uno de ellos no existen vértices adyacentes.

<b>Grafo bipartito completo</b>	Un grafo bipartito en el cual cada uno de los vértices de un conjunto está conectado a todos los vértices del otro conjunto.
<b>Grafo completo</b>	Un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista.
<b>Grafo conexo</b>	Un grafo en el que cada par de vértices está conectado por un camino.
<b>Grafo inconexo</b>	Un grafo tal que existe al menos un par de vértices que no están conectados por un camino.
<b>Grafo planario</b>	Un grafo que puede dibujarse en el plano de manera tal que ninguna arista corte otra arista.
<b>Grafo ponderado</b>	Un grafo en el que a cada arista se le asigna un número o peso.
<b>Grafo simple</b>	Un grafo sin lazos ni aristas múltiples.
<b>Isomorfismo de grafos entre dos grafos simples <math>G</math> y <math>H</math></b>	Una correspondencia uno a uno entre los vértices de $G$ y de $H$ tal que dos vértices en $G$ son adyacentes si y solo si los dos vértices correspondientes de $H$ son adyacentes.
<b>Lazo</b>	Una arista que une un vértice con él mismo.
<b>Recorrido</b>	Una progresión de aristas enlazadas.
<b>Sendero</b>	Un recorrido en el que ninguna arista aparece más de una vez.
<b>Sendero euleriano</b>	Un sendero que contiene todas las aristas de un grafo.
<b>Subgrafo</b>	Un grafo dentro de otro grafo.

# La evaluación en el Programa del Diploma

## Información general

La evaluación es una parte fundamental de la enseñanza y el aprendizaje. Los objetivos más importantes de la evaluación en el Programa del Diploma son los de apoyar los objetivos del currículo y fomentar un aprendizaje adecuado por parte de los alumnos. En el Programa del Diploma, la evaluación es tanto interna como externa. Los trabajos preparados para la evaluación externa son corregidos por examinadores del IB, mientras que los trabajos presentados para la evaluación interna son corregidos por los profesores y moderados externamente por el IB.

El IB reconoce dos tipos de evaluación:

- La evaluación formativa orienta la enseñanza y el aprendizaje. Proporciona a los alumnos y profesores información útil y precisa sobre el tipo de aprendizaje que se está produciendo y sobre los puntos fuertes y débiles de los alumnos, lo que permite ayudarles a desarrollar sus conocimientos y aptitudes. La evaluación formativa también ayuda a mejorar la calidad de la enseñanza, pues proporciona información que permite hacer un seguimiento de la medida en que se alcanzan los objetivos generales y los objetivos de evaluación del curso.
- La evaluación sumativa ofrece una impresión general del aprendizaje que se ha producido hasta un momento dado y se emplea para determinar los logros de los alumnos.

En el Programa del Diploma se utiliza principalmente una evaluación sumativa concebida para identificar los logros de los alumnos al final del curso o hacia el final del mismo. Sin embargo, muchos de los instrumentos de evaluación se pueden utilizar también con propósitos formativos durante el curso de la enseñanza y el aprendizaje, y se anima a los profesores a que los utilicen de este modo. Un plan de evaluación exhaustivo debe ser una parte fundamental de la enseñanza, el aprendizaje y la organización del curso. Para más información, consulte el documento *Normas para la implementación de los programas y aplicaciones concretas*.

La evaluación en el IB se basa en criterios establecidos; es decir, se evalúa el trabajo de los alumnos en relación con niveles de logro determinados y no en relación con el trabajo de otros alumnos. Para más información sobre la evaluación en el Programa del Diploma, consulte la publicación titulada *Principios y práctica del sistema de evaluación del Programa del Diploma*.

Para ayudar a los profesores en la planificación, implementación y evaluación de los cursos del Programa del Diploma, hay una variedad de recursos que se pueden consultar en el CPEL o adquirir en la tienda virtual del IB (<http://store.ibo.org>). En el CPEL pueden encontrar materiales de ayuda al profesor, informes de la asignatura, información adicional sobre la evaluación interna y descriptores de las calificaciones finales, así como materiales aportados por otros docentes. En la tienda virtual del IB se pueden adquirir exámenes de muestra, exámenes de convocatorias pasadas y esquemas de calificación.

## Métodos de evaluación

El IB emplea diversos métodos para evaluar el trabajo de los alumnos.

## **Criterios de evaluación**

Cuando la tarea de evaluación es abierta (es decir, se plantea de tal manera que fomenta una variedad de respuestas), se utilizan criterios de evaluación. Cada criterio se concentra en una habilidad específica que se espera que demuestren los alumnos. Los objetivos de evaluación describen lo que los alumnos deben ser capaces de hacer y los criterios de evaluación describen qué nivel deben demostrar al hacerlo. Los criterios de evaluación permiten evaluar del mismo modo respuestas muy diferentes. Cada criterio está compuesto por una serie de descriptores de nivel ordenados jerárquicamente. Cada descriptor de nivel equivale a uno o varios puntos. Se aplica cada criterio de evaluación por separado, y se localiza el descriptor que refleja más adecuadamente el nivel conseguido por el alumno. Distintos criterios de evaluación pueden tener puntuaciones máximas diferentes en función de su importancia. Los puntos obtenidos en cada criterio se suman, dando como resultado la puntuación total para el trabajo en cuestión.

## **Bandas de calificación**

Las bandas de calificación describen de forma integradora el desempeño esperado y se utilizan para evaluar las respuestas de los alumnos. Constituyen un único criterio holístico, dividido en descriptores de nivel. A cada descriptor de nivel le corresponde un rango de puntos, lo que permite diferenciar el desempeño de los alumnos. Del rango de puntos de cada descriptor de nivel, se elige la puntuación que mejor corresponda al nivel logrado por el alumno.

## **Esquemas de calificación**

Este término general se utiliza para describir los baremos analíticos que se crean para pruebas de examen específicas. Se preparan para aquellas preguntas de examen que se espera que los alumnos contesten con un tipo concreto de respuesta o una respuesta final determinada. Indican a los examinadores cómo desglosar la puntuación total disponible para cada pregunta con respecto a las diferentes partes de esta. Los esquemas de calificación pueden indicar el contenido que se espera que tengan las respuestas, o pueden consistir en una serie de aclaraciones sobre cómo deben aplicarse los criterios de evaluación en la corrección.

## Resumen de la evaluación

## Primeros exámenes: 2014

Componente de evaluación	Porcentaje de la evaluación
<p><b>Evaluación externa (5 horas)</b></p> <p><b>Prueba 1 (2 horas)</b> No se permite el uso de calculadoras. (100 puntos)</p> <p><i>Sección A</i> La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el tronco común del programa de estudios.</p> <p><i>Sección B</i> La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el tronco común del programa de estudios.</p> <p><b>Prueba 2 (2 horas)</b> Se requiere el uso de calculadoras de pantalla gráfica. (100 puntos)</p> <p><i>Sección A</i> La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el tronco común del programa de estudios.</p> <p><i>Sección B</i> La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el tronco común del programa de estudios.</p> <p><b>Prueba 3 (1 hora)</b> Se requiere el uso de calculadoras de pantalla gráfica. (50 puntos)</p> <p>La prueba consta de preguntas obligatorias de respuesta larga fundamentalmente relacionadas con las unidades opcionales del programa de estudios.</p>	<p><b>80%</b></p> <p><b>30%</b></p> <p><b>30%</b></p> <p><b>20%</b></p>
<p><b>Evaluación interna</b> Este componente lo evalúa internamente el profesor y lo modera externamente el IB al final del curso.</p> <p><b>Exploración matemática</b> La evaluación interna en Matemáticas NS es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas. (20 puntos)</p>	<p><b>20%</b></p>

# Evaluación externa

## Información general

Los esquemas de calificación se utilizan para evaluar a los alumnos en todas las pruebas y son específicos para cada prueba de examen.

## Descripción detallada de la evaluación externa

### Pruebas 1, 2 y 3

Estas pruebas las establece y evalúa el IB. En total, representan el 80% de la nota final del curso. Están diseñadas para que los alumnos puedan demostrar lo que saben y son capaces de hacer.

### Calculadoras

#### Prueba 1

No se permite a los alumnos disponer de ninguna calculadora. En las preguntas se les pedirá principalmente que adopten un enfoque analítico para llegar a las soluciones, en lugar de que usen calculadoras de pantalla gráfica. La prueba no requerirá cálculos complicados que puedan llevar a cometer errores por descuido. No obstante, las preguntas implicarán realizar operaciones aritméticas cuando estas sean esenciales para su desarrollo.

#### Pruebas 2 y 3

Los alumnos deben disponer de una calculadora de pantalla gráfica en todo momento. No obstante, no todas las preguntas requerirán necesariamente el uso de calculadoras de pantalla gráfica. En el *Manual de procedimientos del Programa del Diploma* se proporciona información sobre los tipos de calculadoras de pantalla gráfica permitidos.

### Cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y Ampliación de Matemáticas NS

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas durante el examen. El colegio será el encargado de descargarlo desde IBIS o el CPEL, y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

### Asignación de notas

Se asignan puntos por método, precisión, respuestas correctas y razonamiento, lo cual incluye interpretación.

En las pruebas 1 y 2, las respuestas correctas que no presentan por escrito el procedimiento realizado no siempre reciben la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes (por ejemplo, en forma de diagramas, gráficos o cálculos). Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden otorgar algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y este sea correcto. Por lo tanto, se debe recomendar a los alumnos que muestren todos los procedimientos utilizados.

## Prueba 1

**Duración:** 2 horas

**Porcentaje del total de la evaluación:** 30%

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- No se permite a los alumnos disponer de ninguna calculadora en esta prueba.

### Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todas** las unidades del tronco común del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todas las unidades se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

### Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **100** puntos y representa el **30%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

### Sección A

- Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el tronco común del programa de estudios. La puntuación máxima es de 50 puntos.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos y comprensión de los alumnos sobre las unidades del programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todas las unidades.

### Tipo de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

### Sección B

- Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el tronco común del programa de estudios. La puntuación máxima es de 50 puntos.
- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de una unidad.
- La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos y la comprensión de los alumnos sobre las unidades del tronco común del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos unidades del programa de estudios que la sección A.

### Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta desarrolla un único tema.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

## Prueba 2

**Duración:** 2 horas

**Porcentaje del total de la evaluación:** 30%

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- Para esta prueba se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no todas las preguntas requerirán necesariamente su uso.

### Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todas** las unidades del tronco común del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todas las unidades se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

### Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **100** puntos y representa el **30%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

### Sección A

- Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el tronco común del programa de estudios. La puntuación máxima es de 50 puntos.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos y comprensión de los alumnos sobre las unidades del programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todas las unidades.

### Tipo de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

### Sección B

- Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el tronco común del programa de estudios. La puntuación máxima es de 50 puntos.
- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de una unidad.
- La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos y la comprensión de los alumnos sobre las unidades del tronco común del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos unidades del programa de estudios que la sección A.

### Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta desarrolla un único tema.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

## Prueba 3

**Duración: 1 hora**

**Porcentaje del total de la evaluación: 20%**

- Esta prueba consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con la unidad opcional elegida.
- Siempre que sea posible, el primer apartado de cada pregunta se referirá a los contenidos del tronco común que se relacionan con la unidad opcional. Cuando no pueda ser así, como por ejemplo, en el caso de la unidad opcional sobre matemática discreta, el nivel de dificultad del primer apartado de la pregunta será equivalente al de las preguntas del tronco común.

### Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Los alumnos deben responder a **todas** las preguntas.
- Para esta prueba se requiere el conocimiento de todos los contenidos de la unidad opcional estudiada y del tronco común.

### Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **50** puntos y representa el **20%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba pueden variar en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, es posible que cada una de ellas no se califique con la misma puntuación. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

### Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta puede desarrollar un único tema o estar dividida en apartados no relacionados entre sí. Cuando esto ocurra, dichos apartados vendrán claramente rotulados en este sentido.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

## Evaluación interna

### Propósito de la evaluación interna

La evaluación interna es una parte fundamental del curso y es obligatoria para todos los alumnos. Les permite a los alumnos demostrar la aplicación de sus habilidades y conocimientos y dedicarse a aquellas áreas que despierten su interés sin las restricciones de tiempo y de otros tipos asociadas a los exámenes escritos. La evaluación interna debe, en la medida de lo posible, integrarse en la enseñanza normal en clase, y no ser una actividad aparte que tiene lugar una vez que se han impartido todos los contenidos del curso.

La evaluación interna en Matemáticas NS es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas, y se corrige de acuerdo con cinco criterios de evaluación.

### Orientación y autoría original

La exploración presentada para la evaluación interna debe ser trabajo original del alumno. Sin embargo, no se pretende que los alumnos decidan el título o el tema de su exploración y que se les deje trabajar sin ningún tipo de apoyo por parte del profesor. El profesor debe desempeñar un papel importante en las etapas de planificación y desarrollo de la exploración. Es responsabilidad del profesor asegurarse de que los alumnos estén familiarizados con:

- Los requisitos del tipo de trabajo que se va a evaluar internamente
- La política de probidad académica del IB, disponible en el CPEL
- Los criterios de evaluación (los alumnos deben entender que el trabajo que presenten para evaluación debe abordar eficazmente estos criterios)

Los profesores y los alumnos deben discutir la exploración. Se debe animar a los alumnos a dirigirse al profesor en busca de consejos e información, y no se les debe penalizar por solicitar orientación. Sin embargo, si un alumno no fuera capaz de completar la exploración sin considerable ayuda del profesor, esto deberá anotarse en el formulario correspondiente del *Manual de procedimientos del Programa del Diploma*.

Los profesores tienen la responsabilidad de asegurarse de que todos los alumnos entiendan el significado y la importancia de los conceptos relacionados con la probidad académica, especialmente los de autoría original y propiedad intelectual. Los profesores deben verificar que todos los trabajos que los alumnos entreguen para evaluación hayan sido preparados conforme a los requisitos, y deben explicar claramente a los alumnos que la exploración debe ser original en su totalidad.

Como parte del proceso de aprendizaje, los profesores pueden aconsejar a los alumnos sobre el **primer borrador** de la exploración. El profesor podrá sugerir maneras de mejorarlo, pero sin llegar a corregirlo o editarlo excesivamente. La próxima versión que se entregue al profesor después del primer borrador será considerada la versión final.

Los profesores deben verificar la autoría original de todo trabajo que se envíe al IB para su moderación o evaluación, y no deben enviar ningún trabajo que constituya (o sospechen que constituya) un caso de conducta impropia. Cada alumno debe firmar una portada de la evaluación interna para confirmar que el trabajo que presenta para la evaluación es original y que es la versión final del mismo. Una vez que el alumno haya

entregado oficialmente la versión final de su trabajo junto con la portada firmada al profesor (o al coordinador) para la evaluación interna, no podrá pedir que se la devuelvan para modificarla.

La autoría de los trabajos se puede comprobar debatiendo su contenido con el alumno y analizando con detalle uno o más de los aspectos siguientes:

- La propuesta inicial del alumno
- El primer borrador del trabajo escrito
- Las referencias bibliográficas citadas
- El estilo de redacción, comparado con trabajos que se sabe que ha realizado el alumno

El requisito de firmar, tanto el alumno como el profesor, la portada de la evaluación interna se aplica al trabajo de todos los alumnos, no solo al de aquellos que formen parte de la muestra que se enviará al examinador para moderación. Si el profesor y el alumno firman la portada, pero esta incluye algún comentario que indique que el trabajo pudiera no ser original, el alumno no recibirá nota alguna en ese componente y, por tanto, no podrá obtener una calificación final para la asignatura. Para más información, consulte la publicación del IB titulada *Probidad académica* y los artículos pertinentes del *Reglamento general del Programa del Diploma*.

No se permite presentar un mismo trabajo para la evaluación interna y la Monografía.

## Trabajo en grupo

Se debe descartar el trabajo en grupo para la exploración. Cada exploración ha de ser un trabajo individual basado en distintas recopilaciones de datos o mediciones realizadas.

Se debe aclarar a los alumnos que todo el trabajo relacionado con la exploración, incluida su redacción, ha de ser personal. Es, por tanto, conveniente que los profesores intenten fomentar entre los alumnos un sentido de la responsabilidad respecto de su aprendizaje, de manera que perciban su trabajo como algo propio de lo que se sientan orgullosos.

## Temporalización

La evaluación interna es una parte fundamental del curso de Matemáticas NS y representa un 20% de la evaluación final del curso. Este porcentaje debe verse reflejado en el tiempo que se dedica a enseñar los conocimientos y las habilidades necesarios para llevar a cabo el trabajo de evaluación interna, así como en el tiempo total dedicado a realizar el trabajo.

Se espera que se asigne un total de aproximadamente 10 horas lectivas al trabajo. En estas horas se deberá incluir:

- El tiempo que necesita el profesor para explicar a los alumnos los requisitos de la exploración
- Tiempo de clase para que los alumnos trabajen en la exploración
- Tiempo para consultas entre el profesor y cada alumno
- Tiempo para revisar el trabajo y evaluar cómo progresa, y para comprobar que es original

## Uso de los criterios de evaluación en la evaluación interna

Para la evaluación interna, se ha establecido una serie de criterios de evaluación. Cada criterio cuenta con cierto número de descriptores; cada uno describe un nivel de logro específico y equivale a un determinado rango de puntos. Los descriptores se centran en aspectos positivos aunque, en los niveles más bajos, la descripción puede mencionar la falta de logros.

Los profesores deben valorar los trabajos de evaluación interna con relación a los criterios, utilizando los descriptores de nivel.

- El propósito es encontrar, para cada criterio, el descriptor que exprese de la forma más adecuada el nivel de logro alcanzado por el alumno.
- Al evaluar el trabajo de un alumno, los profesores deben leer los descriptores de cada criterio, empezando por el nivel 0 y hasta llegar al descriptor que describa un nivel de logro que el alumno no haya alcanzado. El nivel que alcance el alumno será, por tanto, el inmediatamente anterior, y es el que se deberá asignar.
- Solamente deben utilizarse números enteros y no notas parciales, como fracciones o decimales.
- Los profesores no deben pensar en términos de aprobado o no aprobado, sino que deben concentrarse en identificar el descriptor apropiado para cada criterio de evaluación.
- Los descriptores de nivel más altos no implican un trabajo perfecto y pueden ser alcanzados por los alumnos. Los profesores no deben dudar en conceder los niveles extremos si corresponden a descriptores apropiados del trabajo que se está evaluando.
- Un alumno que alcance un nivel de logro alto en un criterio no necesariamente alcanzará niveles altos en los demás criterios. Igualmente, un alumno que alcance un nivel de logro bajo en un criterio no necesariamente alcanzará niveles bajos en los demás criterios. Los profesores no deben suponer que la evaluación general de los alumnos haya de dar como resultado una distribución determinada de puntuaciones.
- Se espera que los alumnos tengan acceso a los criterios de evaluación.

## Descripción detallada de la evaluación interna

### Exploración matemática

**Duración:** 10 horas lectivas

**Porcentaje del total de la evaluación:** 20%

#### Introducción

El componente de la evaluación interna en este curso es una exploración matemática. Consiste en un breve informe escrito por el alumno, basado en un tema elegido por este, y que debe centrarse en las matemáticas de esa área determinada. Se hace hincapié en la comunicación matemática (incluidos diagramas, fórmulas, gráficos, etc.) acompañada de comentarios, una buena redacción matemática y reflexiones serias. El alumno debe desarrollar su propio enfoque, y el profesor debe proporcionar comentarios sobre el trabajo a través de, por ejemplo, debates y entrevistas. De este modo, los alumnos pueden desarrollar un área de su interés sin las limitaciones de tiempo de los exámenes, y experimentar una sensación de éxito.

El informe final debe tener una extensión aproximada de entre 6 y 12 páginas. Puede estar escrito a mano o con procesador de textos. Los alumnos han de ser capaces de explicar todas las etapas de su trabajo de manera que demuestren una comprensión clara. Aunque no se pretende que los alumnos hagan una presentación de su trabajo en clase, este ha de estar escrito de modo que sus compañeros puedan seguirlo con relativa facilidad. El informe debe incluir una bibliografía detallada, y es necesario que se incluyan referencias a las fuentes según la política de probidad académica del IB. Las citas textuales deben mencionar la fuente.

## Propósito de la exploración

Los objetivos generales de Matemáticas NS se logran a través de los objetivos de evaluación que se evalúan formalmente como parte del curso, sea en los exámenes escritos, en la exploración, o en ambos. Se pretende que la exploración, además de evaluar los objetivos de evaluación del curso, proporcione a los alumnos oportunidades para aumentar su comprensión de los conceptos y procesos matemáticos, y para desarrollar una noción más amplia de las matemáticas. Esto se recoge en los objetivos generales del curso, en concreto los objetivos que van del 6 al 9 (**aplicaciones, tecnología, implicaciones morales, sociales y éticas, y dimensión internacional**). Se espera que, realizando la exploración, los alumnos saquen provecho de las actividades matemáticas implicadas, y que estas les resulten motivadoras y gratificantes. Ello permitirá el desarrollo de los atributos del perfil de la comunidad de aprendizaje del IB por parte de los alumnos.

Con la exploración se pretende:

- Que los alumnos desarrollen una perspectiva propia acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como la capacidad para plantearse sus propias preguntas sobre la disciplina
- Proporcionar a los alumnos oportunidades para realizar un trabajo matemático durante un período prolongado de tiempo
- Que los alumnos puedan experimentar la satisfacción de aplicar procesos matemáticos de forma independiente
- Proporcionar a los alumnos oportunidades de experimentar la belleza, las posibilidades y la utilidad de las matemáticas
- Motivar a los alumnos, cuando proceda, a descubrir, utilizar y apreciar el poder de la tecnología como herramienta matemática
- Que los alumnos sean capaces de desarrollar cualidades tales como la paciencia y la perseverancia, así como de reflexionar sobre el significado de los resultados que obtienen
- Proporcionar a los alumnos oportunidades para exponer con confianza el alcance de su evolución en matemáticas

## Organización y desarrollo de la exploración

El trabajo relacionado con la exploración debe realizarse como parte del curso, de modo que los alumnos tengan la oportunidad de adquirir las destrezas necesarias. Las horas lectivas dedicadas a la exploración pueden, por tanto, utilizarse para realizar discusiones generales sobre temas de estudio, así como para que los alumnos se familiaricen con los criterios. En el material de ayuda al profesor se incluye más información sobre el desarrollo de la exploración.

## Requisitos y recomendaciones

Los alumnos pueden elegir entre una amplia variedad de actividades, por ejemplo, utilización de modelos, investigaciones y aplicaciones de las matemáticas. Para ayudar a profesores y alumnos en la elección del tema, en el material de ayuda al profesor hay disponible una lista de sugerencias. Sin embargo, los alumnos no están limitados a elegir una opción de esta lista.

En general, la exploración no debe exceder las 12 páginas, incluidos los diagramas y los gráficos, pero sin contar la bibliografía. No obstante, lo importante es la calidad del trabajo matemático, y no la extensión.

El profesor ha de ofrecer una orientación adecuada en cada una de las etapas de la exploración como, por ejemplo, dirigir a los alumnos hacia líneas de investigación más fructíferas, hacer sugerencias sobre fuentes de información apropiadas, y dar consejos sobre el contenido y la claridad de la exploración en su fase de redacción.

Los profesores deben advertir a los alumnos sobre la existencia de errores, pero sin corregirlos de manera explícita. Es necesario insistir en que los alumnos deben asesorarse con el profesor a lo largo de todo el proceso.

Todos los alumnos han de estar familiarizados con los requisitos y con los criterios de evaluación de la exploración. Los alumnos han de comenzar a planificar sus exploraciones lo más pronto posible una vez comenzado el curso. Los plazos de entrega se deben establecer de modo estricto. Debe fijarse una fecha para la entrega del tema de la exploración y una breve descripción de la misma, otra para la entrega del primer borrador y, por supuesto, la fecha para la finalización de la exploración.

Para desarrollar las exploraciones, los alumnos deben tratar de hacer uso de los conocimientos matemáticos adquiridos durante el curso. El nivel de complejidad debe ser acorde con el del curso, es decir, debe ser similar al establecido en el programa del curso. No se espera que los alumnos elaboren un trabajo sobre temas no incluidos en el programa de estudios de Matemáticas NS (no obstante, ello no será objeto de sanción).

## Criterios de evaluación interna

La exploración es evaluada internamente por el profesor y moderada externamente por el IB utilizando criterios de evaluación que se refieren a los objetivos de evaluación de Matemáticas NS.

Cada exploración se evalúa según los cinco criterios siguientes. La nota final de cada exploración es la suma de los puntos obtenidos en cada criterio. La nota final máxima es 20.

**Los alumnos que no presenten una exploración no recibirán una calificación final para Matemáticas NS.**

<b>Criterio A</b>	Comunicación
<b>Criterio B</b>	Presentación matemática
<b>Criterio C</b>	Compromiso personal
<b>Criterio D</b>	Reflexión
<b>Criterio E</b>	Uso de las matemáticas

### Criterio A: Comunicación

Este criterio evalúa la organización y la coherencia de la exploración. Una exploración bien organizada consta de una introducción, unas bases o fundamentos (incluida la explicación de por qué se eligió el tema), una descripción del objetivo general de la exploración y una conclusión. Una exploración coherente está desarrollada de modo lógico y es fácil de seguir.

*Se deben incluir los gráficos, las tablas y los diagramas donde corresponda en el trabajo y no adjuntarlos como anexos al final del documento.*

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	La exploración tiene cierta coherencia.
2	La exploración tiene cierta coherencia y muestra cierta organización.
3	La exploración es coherente y está bien organizada.
4	La exploración es coherente, está bien organizada, y es concisa y completa.

## Criterio B: Presentación matemática

Este criterio evalúa en qué medida el alumno es capaz de:

- Utilizar el lenguaje matemático apropiado (por ejemplo, notación, símbolos y terminología)
- Definir términos clave, cuando sea necesario
- Utilizar múltiples formas de representación matemática, tales como fórmulas, diagramas, tablas, gráficos y modelos, donde resulte apropiado

*Se espera de los alumnos que utilicen el lenguaje matemático a la hora de comunicar ideas, razonamientos y hallazgos matemáticos.*

*Se anima a los alumnos a elegir y a utilizar las herramientas tecnológicas apropiadas, como calculadoras de pantalla gráfica, capturas de pantalla, programas de elaboración de gráficos, hojas de cálculo, bases de datos, procesadores de texto y programas de dibujo, según corresponda, con el fin de mejorar la comunicación matemática.*

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	La presentación matemática es, en cierto grado, adecuada.
2	La presentación matemática es, en su mayor parte, adecuada.
3	La presentación matemática es adecuada en su totalidad.

## Criterio C: Compromiso personal

Este criterio evalúa la medida en que el alumno se compromete con la exploración y la hace propia. El compromiso personal se puede reconocer en distintos atributos y destrezas. Entre ellos se encuentra el pensamiento independiente o creativo, la elección de temas de interés personal y la presentación de ideas matemáticas a su manera.

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Hay indicios de un compromiso personal limitado o superficial.
2	Hay indicios de cierto compromiso personal.
3	Hay indicios de un importante compromiso personal.
4	Hay numerosos indicios de un excelente compromiso personal.

## Criterio D: Reflexión

Este criterio evalúa en qué medida el alumno revisa, analiza y evalúa la exploración. Aunque la reflexión se puede ver en las conclusiones de la exploración, también se puede encontrar a lo largo del trabajo.

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Hay indicios de una reflexión limitada o superficial.
2	Hay indicios de una reflexión significativa.
3	Hay indicios contundentes de una reflexión crítica.

## Criterio E: Uso de las matemáticas

Este criterio evalúa en qué medida y con qué competencia los alumnos utilizan las matemáticas en la exploración.

*Se espera de los alumnos que elaboren un trabajo que sea acorde con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados deben ser, bien parte del programa de estudios, o bien de un nivel similar o superior. Estos aspectos no deben estar basados únicamente en los temas de matemáticas incluidos en los conocimientos previos. Si el nivel de matemáticas no es acorde con el nivel del curso, se puede otorgar, como máximo, dos puntos en este criterio.*

*Las matemáticas se pueden considerar correctas incluso si existen errores menores ocasionales, siempre y cuando no desvirtúen el razonamiento matemático o lleven a resultados poco razonables.*

*La complejidad en matemáticas puede incluir la comprensión y el uso de conceptos matemáticos de mayor dificultad, afrontar un problema desde perspectivas distintas y percibir estructuras subyacentes que vinculen áreas distintas de las matemáticas.*

*El rigor implica claridad de lógica y lenguaje al hacer razonamientos y cálculos matemáticos.*

*La precisión matemática implica la ausencia de errores y un nivel de aproximación adecuado en todo momento.*

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Se demuestra una comprensión limitada.
2	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Los aspectos matemáticos explorados son parcialmente correctos. Se demuestran cierto conocimiento y cierta comprensión.
3	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión buenos.

Nivel	Descriptor de nivel
4	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos y reflejan la complejidad esperada. Se demuestran un conocimiento y una comprensión buenos.
5	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos y reflejan la complejidad y el rigor esperados. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos.
6	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados demuestran precisión, y reflejan la complejidad y el rigor esperados. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos.

## Glosario de términos de instrucción

### Términos de instrucción con definiciones

Los alumnos deberán familiarizarse con los siguientes términos y expresiones utilizados en las preguntas de examen. Los términos se deberán interpretar tal y como se describe a continuación. Aunque estos términos se usarán en las preguntas de examen, también podrán usarse otros términos con el fin de guiar a los alumnos para que presenten un argumento de una manera específica.

<b>A partir de lo anterior</b>	Utilizar los resultados obtenidos anteriormente para responder a la pregunta.
<b>A partir de lo anterior o de cualquier otro modo</b>	La expresión sugiere que se utilicen los resultados obtenidos anteriormente, pero también pueden considerarse válidos otros métodos.
<b>Calcular</b>	Obtener una respuesta numérica y mostrar las operaciones pertinentes.
<b>Comentar</b>	Emitir un juicio basado en un enunciado determinado o en el resultado de un cálculo.
<b>Comparar</b>	Exponer las semejanzas entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos).
<b>Comparar y contrastar</b>	Exponer las semejanzas y diferencias entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos).
<b>Contrastar</b>	Exponer las diferencias entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos).
<b>Deducir</b>	Establecer una conclusión a partir de la información suministrada.
<b>Demostrar</b>	Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas.
<b>Demostrar</b>	Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.
<b>Derivar</b>	Obtener la derivada de una función.
<b>Describir</b>	Exponer detalladamente.
<b>Determinar</b>	Obtener la única respuesta posible.
<b>Dibujar aproximadamente</b>	Representar por medio de un diagrama o un gráfico (rotulados si fuese necesario). El esquema deberá dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes.
<b>Dibujar con precisión</b>	Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave.

<b>Distinguir</b>	Indicar de forma clara las diferencias entre dos o más conceptos o elementos.
<b>Elaborar</b>	Mostrar información de forma lógica o con un diagrama.
<b>Enumerar</b>	Proporcionar una lista de respuestas cortas sin ningún tipo de explicación.
<b>Escribir</b>	Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido.
<b>Estimar</b>	Obtener un valor aproximado.
<b>Explicar</b>	Exponer detalladamente las razones o causas de algo.
<b>Hallar</b>	Obtener una respuesta mostrando los pasos pertinentes.
<b>Identificar</b>	Dar una respuesta entre un número de posibilidades.
<b>Indicar</b>	Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.
<b>Integrar</b>	Obtener la integral de una función.
<b>Interpretar</b>	Utilizar los conocimientos y la comprensión para reconocer tendencias y extraer conclusiones a partir de información determinada.
<b>Investigar</b>	Observar, estudiar o realizar un examen detallado y sistemático para probar hechos y llegar a nuevas conclusiones.
<b>Justificar</b>	Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.
<b>Mostrar</b>	Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.
<b>Mostrar que</b>	Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.
<b>Predecir</b>	Dar un resultado esperado.
<b>Resolver</b>	Obtener la respuesta por medio de métodos algebraicos, numéricos o gráficos.
<b>Rotular</b>	Añadir rótulos o encabezamientos a un diagrama.
<b>Situar</b>	Marcar la posición de puntos en un diagrama.
<b>Sugerir</b>	Proponer una solución, una hipótesis u otra posible respuesta.
<b>Verificar</b>	Proporcionar pruebas que validen el resultado.

# Notación

Entre los diversos tipos de notación usuales, el IB ha decidido adoptar un sistema que sigue las recomendaciones de la Organización Internacional de Normalización (ISO). Esta notación se utiliza en las pruebas de examen de este curso sin explicaciones. Si en una prueba de examen determinada se utilizasen otras formas de notación no contenidas en esta guía, estas vendrían definidas dentro de la pregunta donde aparezcan.

Puesto que los alumnos deben reconocer, aunque no necesariamente utilizar, la notación del IB empleada en los exámenes, se recomienda que los profesores la introduzcan lo antes posible. Durante los exámenes **no** está permitido consultar esta notación.

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras.

$\mathbb{N}$	conjunto de los números enteros positivos y el cero, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros, $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	conjunto de los números enteros positivos, $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}^+$	conjunto de los números racionales positivos, $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos, $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$i$	$\sqrt{-1}$
$z$	número complejo
$z^*$	número complejo conjugado de $z$
$ z $	módulo de $z$
$\arg z$	argumento de $z$
$\operatorname{Re} z$	parte real de $z$
$\operatorname{Im} z$	parte imaginaria de $z$
$\operatorname{cis} \theta$	$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$
$\{x_1, x_2, \dots\}$	conjunto de los elementos $x_1, x_2, \dots$
$n(A)$	número de elementos del conjunto finito $A$
$\{x \mid \}$	conjunto de todos los $x$ tales que
$\in$	es un elemento de/pertenece a
$\notin$	no es un elemento de/no pertenece a
$\emptyset$	conjunto vacío
$U$	conjunto universal
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\subset$	es un subconjunto propio de

$\subseteq$	es un subconjunto de/está contenido en
$A'$	conjunto complementario del conjunto $A$
$A \times B$	producto cartesiano de los conjuntos $A$ y $B$ (es decir, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ )
$a \mid b$	$a$ divide a $b$
$a^{1/n}, \sqrt[n]{a}$	$a$ elevado a $\frac{1}{n}$ , raíz $n$ -ésima (enésima) de $a$ (si $a \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a} \geq 0$ )
$ x $	el módulo o valor absoluto de $x$ , es decir $\begin{cases} x & \text{para } x \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ -x & \text{para } x < 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$
$\equiv$	identidad
$\approx$	es aproximadamente igual a
$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que
$\nlessgtr$	no es mayor que
$\nlessgtr$	no es menor que
$\Rightarrow$	implica (es necesario)
$\Leftarrow$	está implicado por (es suficiente)
$\Leftrightarrow$	es necesario y suficiente (si y solo si, es equivalente a)
$[a, b]$	el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	el intervalo abierto $a < x < b$
$u_n$	término $n$ -ésimo (enésimo) de una progresión
$d$	diferencia de una progresión aritmética
$r$	razón de una progresión geométrica
$S_n$	suma de los $n$ primeros términos de una progresión, $u_1 + u_2 + \dots + u_n$
$S_\infty$	suma de los infinitos términos de una progresión, $u_1 + u_2 + \dots$
$\sum_{i=1}^n u_i$	$u_1 + u_2 + \dots + u_n$
$\prod_{i=1}^n u_i$	$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
$\binom{n}{r}$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
$n!$	$n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
$f: A \rightarrow B$	$f$ es una función que asigna a cada elemento del conjunto $A$ una imagen en el conjunto $B$

$f : x \mapsto y$	$f$ es una función que aplica $x$ en $y$
$f(x)$	imagen de $x$ por la función $f$
$f^{-1}$	función inversa de la función $f$
$f \circ g$	función compuesta de $f$ y $g$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$
$\frac{dy}{dx}$	derivada de $y$ con respecto a $x$
$f'(x)$	derivada de $f(x)$ con respecto a $x$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	derivada segunda de $y$ con respecto a $x$
$f''(x)$	derivada segunda de $f(x)$ con respecto a $x$
$\frac{d^n y}{dx^n}$	derivada $n$ -ésima de $y$ con respecto a $x$
$f^{(n)}(x)$	derivada $n$ -ésima de $f(x)$ con respecto a $x$
$\int y dx$	integral indefinida de $y$ con respecto a $x$
$\int_a^b y dx$	integral definida de $y$ con respecto a $x$ entre los límites $x = a$ y $x = b$
$e^x$	función exponencial (de base $e$ ) de $x$
$\log_a x$	logaritmo en base $a$ de $x$
$\ln x$	logaritmo natural de $x$ , $\log_e x$
sen, cos, tan	funciones trigonométricas (circulares)
arcsen, arccos, arctan	funciones circulares inversas
csc, sec, cotan	funciones circulares recíprocas (o cofunciones)
$A(x, y)$	punto $A$ del plano, de coordenadas cartesianas $x$ e $y$
$[AB]$	segmento de recta con extremos en los puntos $A$ y $B$
$AB$	longitud de $[AB]$
$(AB)$	recta que pasa por los puntos $A$ y $B$
$\hat{A}$	ángulo de vértice $A$
$\hat{C}\hat{A}\hat{B}$	ángulo formado por $[CA]$ y $[AB]$
$\Delta ABC$	triángulo de vértices $A$ , $B$ y $C$
$v$	vector $v$

$\vec{AB}$	vector definido en módulo, dirección y sentido por el segmento de recta orientado de A a B
$\mathbf{a}$	vector de posición $\vec{OA}$
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas cartesianos
$ \mathbf{a} $	módulo de $\mathbf{a}$
$ \vec{AB} $	módulo de $\vec{AB}$
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$	producto escalar de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$
$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$	producto vectorial de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$
$\mathbf{I}$	matriz identidad
$P(A)$	probabilidad del suceso $A$
$P(A')$	probabilidad del suceso “no $A$ ”
$P(A B)$	probabilidad del suceso $A$ condicionado al suceso $B$
$x_1, x_2, \dots$	valores observados
$f_1, f_2, \dots$	frecuencias con que ocurren los valores observados $x_1, x_2, \dots$
$P_x$	función de distribución de probabilidad $P(X=x)$ de la variable aleatoria discreta $X$
$f(x)$	función densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua $X$
$F(x)$	función de distribución acumulada de la variable aleatoria continua $X$
$E(X)$	valor esperado de la variable aleatoria $X$
$\text{Var}(X)$	varianza de la variable aleatoria $X$
$\mu$	media de la población
$\sigma^2$	varianza de la población $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n}$ , donde $n = \sum_{i=1}^k f_i$
$\sigma$	desviación típica de la población
$\bar{x}$	media muestral
$s_n^2$	varianza muestral, $s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$ donde $n = \sum_{i=1}^k f_i$
$s_n$	desviación típica de la muestra
$s_{n-1}^2$	estimación sin sesgo de la varianza de la población, $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ , donde $n = \sum_{i=1}^k f_i$

$B(n, p)$	distribución binomial de parámetros $n$ y $p$
$Po(m)$	distribución de Poisson de media $m$
$N(\mu, \sigma^2)$	distribución normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$
$X \sim B(n, p)$	la variable aleatoria $X$ tiene una distribución binomial de parámetros $n$ y $p$
$X \sim Po(m)$	la variable aleatoria $X$ tiene una distribución de Poisson de media $m$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	la variable aleatoria $X$ tiene una distribución normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$
$\Phi$	función de distribución acumulada de la variable normal tipificada o estandarizada con distribución $N(0, 1)$
$\nu$	número de grados de libertad
$A \setminus B$	diferencia de los conjuntos $A$ y $B$ (es decir, $A \setminus B = A \cap B' = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$ )
$A \Delta B$	diferencia simétrica de los conjuntos $A$ y $B$ (es decir, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ )
$\kappa_n$	grafo completo con $n$ vértices
$\kappa_{n,m}$	grafo bipartito completo con un conjunto de $n$ vértices y otro conjunto de $m$ vértices
$\mathbb{Z}_p$	conjunto de las clases de equivalencia $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ de enteros módulo $p$
$\text{mcd}(a, b)$	máximo común divisor de los enteros $a$ y $b$
$\text{mcm}(a, b)$	mínimo común múltiplo de los enteros $a$ y $b$
$A_G$	matriz de adyacencia del grafo $G$
$C_G$	matriz de adyacencia de costos del grafo $G$